

**Пример решения задачи:
Двойной интеграл для вычисления массы пластины**

ЗАДАНИЕ.

Найти массу круглой пластины $D: x^2 + y^2 \leq 1$ с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = 3 - x - y$.

РЕШЕНИЕ.

По определению массу пластины можно найти как двойной интеграл от плотности:

$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy = \iint_D (3 - x - y) dx dy =$$

Так как область задана кругом, удобно перейти к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi; \end{cases} \text{ где } D: 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi, dx dy = r dr d\varphi.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} &= \iint_D (3 - r \cos \varphi - r \sin \varphi) r dr d\varphi = \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} (3 - r \cos \varphi - r \sin \varphi) d\varphi = \\ &= \int_0^1 r dr (3\varphi - r \sin \varphi + r \cos \varphi) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \int_0^1 r ((3 \cdot 2\pi - r \sin 2\pi + r \cos 2\pi) - (3 \cdot 0 - r \sin 0 + r \cos 0)) dr = \\ &= \int_0^1 r (6\pi + r - r) dr = 6\pi \int_0^1 r dr = 3\pi r^2 \Big|_0^1 = 3\pi. \end{aligned}$$