# Задача с решением по численным методам
# Тема: численное решение задачи Коши

## ЗАДАНИЕ.

*Численно решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка*

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y0. \end{cases}$$

*на отрезке* $[t_0, T]$, *с шагом* $h = 0.2$ *а) методом Эйлера; б) методом Рунге-Кутты 2-го порядка с оценкой погрешности по правилу Рунге.*

*Найти точное решение задачи. Построить на одном чертеже графики точного и приближенных решений.*

## РЕШЕНИЕ.

$$y' = \frac{2t-5}{t^2}y + 5$$
$$y(2) = 4$$
$$[2;3]; h = 0.2$$

Найдем сначала точное решение задачи.

$$y' - \frac{2t-5}{t^2}y = 5$$

Решим соответствующее однородное уравнение

$$y' - \frac{2t-5}{t^2}y = 0$$
$$y' = \frac{2t-5}{t^2}y$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t-5}{t^2}y$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{2t-5}{t^2}dt$$
$$\int \frac{2t-5}{t^2}dt = \int \frac{2}{t}dt - \int 5t^{-2}dt = 2\ln t + \frac{5}{t} + C$$
$$\ln y = 2\ln t + \frac{5}{t} + C$$
$$y = e^{2\ln t + \frac{5}{t} + C} = e^{\ln t^2} \cdot e^{5/t} \cdot e^C = C_1 t^2 e^{5/t}$$

Теперь положим $C_1 = C_1(t)$

$$y' = \left(C_1 t^2 e^{\frac{5}{t}}\right)' = C_1' t^2 e^{\frac{5}{t}} + 2C_1 t e^{\frac{5}{t}} + C_1 t^2 e^{\frac{5}{t}}\left(-\frac{5}{t^2}\right) =$$

$$= C_1' t^2 e^{5/t} + 2C_1 t e^{5/t} - 5C_1 e^{\frac{5}{t}}$$

Подставим в уравнение

$$y' - \frac{2t-5}{t^2}y = 5$$

Получим:

$$C_1't^2e^{\frac{5}{t}} + 2C_1te^{\frac{5}{t}} - 5C_1e^{\frac{5}{t}} - \frac{2t-5}{t^2}C_1t^2e^{\frac{5}{t}} = 5$$

$$C_1't^2e^{\frac{5}{t}} + 2C_1te^{\frac{5}{t}} - 5C_1e^{\frac{5}{t}} - 2C_1te^{\frac{5}{t}} + 5C_1e^{\frac{5}{t}} = 5$$

$$C_1't^2e^{\frac{5}{t}} = 5$$

$$C_1' = \frac{5}{t^2e^{\frac{5}{t}}}$$

$$C_1 = \int \frac{5}{t^2}e^{-\frac{5}{t}}dt = \int e^{-\frac{5}{t}}d\left(-\frac{5}{t}\right) = e^{-\frac{5}{t}} + C_2$$

Итак, получили общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1t^2e^{5/t} = \left(e^{-\frac{5}{t}} + C_2\right)t^2e^{5/t} = t^2\left(1 + C_2e^{5/t}\right)$$

Найдем константу $C_2$ из условия $y(2) = 4$

$$4 = 2^2\left(1 + C_2e^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$4 = 4\left(1 + C_2e^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$1 + C_2e^{\frac{5}{2}} = 1$$

$$C_2e^{\frac{5}{2}} = 0$$

$$C_2 = 0$$

Получим частное решение:

$$y = t^2\left(1 + 0e^{5/t}\right)$$

$$y = t^2$$

| $t$ | $y$ |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 2,2 | 4,84 |
| 2,4 | 5,76 |
| 2,6 | 6,76 |
| 2,8 | 7,84 |
| 3 | 9 |

**а) Метод Эйлера**

Итерационная формула метода Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k)$$

$$f(t, y) = \frac{2t-5}{t^2}y + 5$$

$$h = 0.2$$

$$t_0 = 2; y_0 = 4$$

$$y_1 = 4 + 0.2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 2 - 5}{2^2} \cdot 4 + 5\right) = 4 + 0.2 \cdot 4 = 4.8$$

Аналогично, на следующем шаге $t_1 = t_0 + h = 2 + 0.2 = 2.2; y_1 = 4.8$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(t_1, y_1)$$
$$y_2 = 4.8 + 0.2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 2.2 - 5}{2.2^2} \cdot 4.8 + 5\right) = 5.680992$$

Следующие шаги представим в таблице:

| $k$ | $t_k$ | $f(t_k, y_k)$ | $y_k$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 4 | 4 |
| 1 | 2,2 | 4,404959 | 4,8 |
| 2 | 2,4 | 4,802743 | 5,680992 |
| 3 | 2,6 | 5,196495 | 6,64154 |
| 4 | 2,8 | 5,587819 | 7,680839 |
| 5 | 3 | | 8,798403 |

б) метод Рунге-Кутты 2-го порядка с оценкой погрешности по правилу Рунге.
Схема метода Рунге-Кутты второго порядка описывается реккурентными формулами:

$$k_1 = hf(t_i; y_i)$$
$$k_2 = hf(t_i + h; y_i + k_1)$$
$$\Delta y_i = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$
$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

На первом шаге имеем:

$$f(t, y) = \frac{2t - 5}{t^2} y + 5$$

$$h = 0.2$$
$$t_0 = 2; y_0 = 4$$
$$k_1^0 = 0.2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 2 - 5}{2^2} \cdot 4 + 5\right) = 0.8$$
$$t_1 + h = 2 + 0.2 = 2.2; y_1 + k_1^1 = 4 + 0.8 = 4.8$$
$$k_2^0 = 0.2\left(\frac{2 \cdot 2.2 - 5}{2.2^2} \cdot 4.8 + 5\right) = 0.880992$$
$$\Delta y_0 = \frac{1}{2}(k_1^0 + k_2^0) = \frac{1}{2}(0.8 + 0.880992) = 0.840496$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 4 + 0.840496 = 4.840496$$

На втором шаге имеем: $t_1 = t_0 + h = 2 + 0.2 = 2.2; y_1 = 4.840496$
Приведем расчет дальнейших шагов в таблице:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_i$ | 2 | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3 |
| $y_i$ | 4 | 4,840496 | 5,760627 | 6,760508 | 7,840208 | 8,999767 |
| $f(t_i, y_i)$ | 4 | 4,399939 | 4,799978 | 5,200015 | 5,600016 | |
| $k_1^i$ | 0,8 | 0,879988 | 0,959996 | 1,040003 | 1,120003 | |
| $t_i + h$ | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3 | |
| $y_i + k_1^i$ | 4,8 | 5,720484 | 6,720623 | 7,800511 | 8,960211 | |
| $f(t_i + h; y_i + k_1^i)$ | 4,404959 | 4,801372 | 5,198835 | 5,596978 | 5,995579 | |
| $k_2^i$ | 0,880992 | 0,960274 | 1,039767 | 1,119396 | 1,199116 | |
| $\Delta y_i$ | 0,840496 | 0,920131 | 0,999881 | 1,079699 | 1,159559 | |

Итак, получили численное решение методом Рунге-Кутта второго порядка:

| $i$ | $t_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 4 |
| 1 | 2,2 | 4,840496 |
| 2 | 2,4 | 5,760627 |
| 3 | 2,6 | 6,760508 |
| 4 | 2,8 | 7,840208 |
| 5 | 3 | 8,999767 |

Для оценки погрешности по правилу Рунге вычислим решение заданного уравнения с шагом $2h = 0.4$

| $i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $t_i$ | 2 | 2,4 | 2,8 |
| $y_i$ | 4 | 5,761111 | 7,838671 |
| $f(t_i, y_i)$ | 4 | 4,799961 | 5,599898 |
| $k_1^i$ | 1,6 | 1,919985 | 2,239959 |
| $t_i + h$ | 2,4 | 2,8 | 3,2 |
| $y_i + k_1^i$ | 5,6 | 7,681096 | 10,07863 |
| $f(t_i + h; y_i + k_1^i)$ | 4,805556 | 5,587839 | 6,377938 |
| $k_2^i$ | 1,922222 | 2,235136 | 2,551175 |
| $\Delta y_i$ | 1,761111 | 2,07756 | 2,395567 |

| $i$ | $x_i$ | $y_i^h$ | $y_i^{2h}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 4 | 4 |
| 1 | 2,2 | 4,840496 | |
| 2 | 2,4 | 5,760627 | 5,761111 |
| 3 | 2,6 | 6,760508 | |
| 4 | 2,8 | 7,840208 | 7,838671 |
| 5 | 3 | 8,999767 | |

Формула

$$\frac{\left|y_i^h - y_i^{2h}\right|}{2^p - 1}$$

дает погрешность решения $y_i^h$. Здесь $p = 2$ - порядок точности решения.

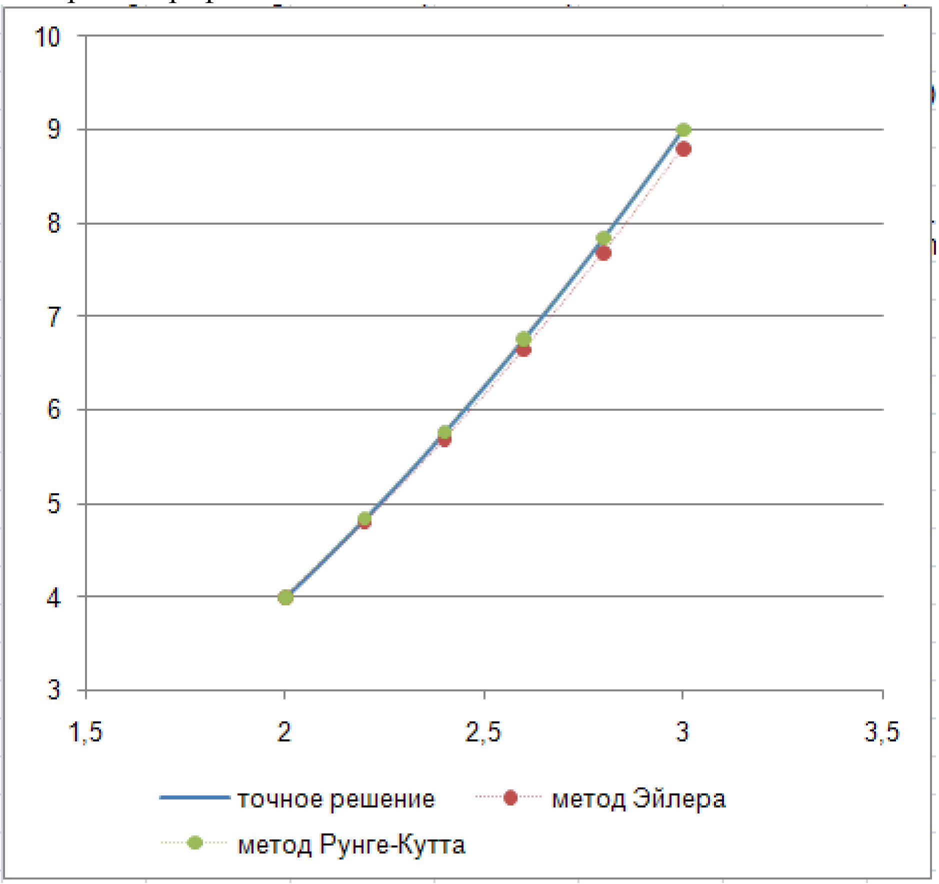
| $y_i^h$ | $y_i^{2h}$ | $\varepsilon = \dfrac{\left\|y_i^h - y_i^{2h}\right\|}{2^p - 1}$ |
|---|---|---|
| 4 | 4 | 0 |
| 4,840496 | | |
| 5,760627 | 5,761111 | 0,000161 |
| 6,760508 | | |
| 7,840208 | 7,838671 | 0,000512 |
| 8,999767 | | |

Сведем все полученные решения в таблицу:

| $t$ | $y(t)$ |
|---|---|

| | точное решение | метод Эйлера | Метод Рунге-Кутта |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 4 | 4 |
| 2,2 | 4,84 | 4,8 | 4,840496 |
| 2,4 | 5,76 | 5,680992 | 5,760627 |
| 2,6 | 6,76 | 6,64154 | 6,760508 |
| 2,8 | 7,84 | 7,680839 | 7,840208 |
| 3 | 9 | 8,798403 | 8,999767 |

Изобразим графически:




**Ответ.**

| $t$ | $y(t)$ | | |
|---|---|---|---|
| | точное решение | метод Эйлера | Метод Рунге-Кутта |
| 2 | 4 | 4 | 4 |
| 2,2 | 4,84 | 4,8 | 4,840496 |
| 2,4 | 5,76 | 5,680992 | 5,760627 |
| 2,6 | 6,76 | 6,64154 | 6,760508 |
| 2,8 | 7,84 | 7,680839 | 7,840208 |
| 3 | 9 | 8,798403 | 8,999767 |