

### Задача с решением по численным методам

**Тема: численное интегрирование, разные методы (прямоугольников, трапеций, Симпсона).**

**ЗАДАНИЕ.**

- 1) Вычислите приближенное значение интеграла с помощью формул прямоугольников, трапеций и Симпсона. Число равных отрезков разбиения интервала  $[a; b]$  взять равным 10.
- 2) Определите оценку погрешности через вторую или четвертую производные.
- 3) Определите абсолютную погрешность приближенного значения интеграла.
- 4) Определите количество узлов разбиения, при которых погрешность приближенного значения интеграла по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона составит 0,01.

$$\int_{1.6}^{2.4} (x + 1) \sin x \, dx$$

**РЕШЕНИЕ.** 1) Приближенное вычисление интеграла.

Разобьем отрезок  $[1.6; 2.4]$  на  $n = 10$  отрезков длины  $h = 0.08$ . Найдем середины отрезков  $\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$ , вычислим значения функции в этих точках.

$i$	$x_i$	$x_i + \frac{h}{2}$	$f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$
0	1,6	1,64	2,633681
1	1,68	1,72	2,689780
2	1,76	1,8	2,726773
3	1,84	1,88	2,743419
4	1,92	1,96	2,738626
5	2	2,04	2,711463
6	2,08	2,12	2,661174
7	2,16	2,2	2,587188
8	2,24	2,28	2,489129
9	2,32	2,36	2,366820
10	2,4		Сумма
			26,348055

Формула прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \approx 0.08 \cdot 26.348055 \approx 2.107844$$

Разобьем отрезок  $[1.6; 2.4]$  на  $n = 10$  отрезков длины  $h = 0.08$ . Вычислим значения функции в узлах разбиения, получим:

$i$	$x_i$	$f(x_i)$
0	1,6	2,598891
1	1,68	2,664036
2	1,76	2,710746
3	1,84	2,737712
4	1,92	2,743765
5	2	2,727892

6	2,08		2,68925
7	2,16		2,627172
8	2,24		2,541184
9	2,32		2,431008
10	2,4	2,296575	
		Сумма	
		4,895466	23,87276

Формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left( \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \approx 0.08 \cdot \left( \frac{4.895466}{2} + 23.872764 \right) \approx 2.105640$$

Разобьем отрезок [1.6; 2.4] на  $n = 10$  отрезков длины  $h = 0.08$ . Вычислим значения функции в узлах разбиения, получим:

$i$	$x_i$	$f(x_i)$		
0	1,6	2,598891		
1	1,68		2,6640358	
2	1,76			2,7107459
3	1,84		2,7377117	
4	1,92			2,7437648
5	2		2,7278923	
6	2,08			2,6892496
7	2,16		2,6271717	
8	2,24			2,5411836
9	2,32		2,4310084	
10	2,4	2,296575		
		Сумма		
		4,895466	13,187820	10,684944

Формула Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot \left( f(x_0) + f(x_n) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{(n-2)/2} f(x_{2i}) \right) \approx \frac{0.08}{3} \cdot (4.895466 + 4 \cdot 13.187820 + 2 \cdot 10.684944) \approx 2.107110$$

## 2) Оценка погрешности.

Априорная оценка погрешности формулы средних прямоугольников:

$$|R| \leq \frac{(b-a)h^2}{24} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

$$f''(x) = ((x+1) \sin x)'' = (\sin x + (x+1) \cos x)' = 2 \cos x - (x+1) \sin x$$

$$\max_{1.6 \leq x \leq 2.4} |2 \cos x - (x+1) \sin x| < 3.8$$

$$|R| \leq \frac{(2.4 - 1.6) \cdot 0.08^2}{24} \cdot 3.8$$

$$|R| \leq 0.000811$$

Априорная оценка погрешности формулы трапеций:

$$|R| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

$$|R| \leq \frac{(2.4 - 1.6) \cdot 0.08^2}{12} \cdot 3.8$$

$$|R| \leq 0.001622$$

Априорная оценка погрешности Симпсона:

$$|R| \leq \frac{(b-a)h^4}{2880} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f^{(IV)}(x)|$$

$$f^{(IV)}(x) = (2 \cos x - (x+1) \sin x)'' = (-3 \sin x - (x+1) \cos x)'$$

$$= -4 \cos x + (x+1) \sin x$$

$$\max_{a \leq x \leq b} |f^{(IV)}(x)| = \max_{1.6 \leq x \leq 2.4} |-4 \cos x + (x+1) \sin x| < 5.25$$

$$|R| \leq \frac{(2.4 - 1.6) \cdot 0.08^4}{2880} \cdot 5.25$$

$$|R| \leq 5.97 \cdot 10^{-7}$$

### 3) Абсолютная погрешность приближенного значения интеграла.

Найдем значение интеграла аналитически:

$$\int_{1.6}^{2.4} (x+1) \sin x \, dx = (\sin x - (x+1) \cos x) \Big|_{1.6}^{2.4}$$

$$= \sin 2.4 - 3.4 \cos 3.4 - \sin 1.6 + 2.6 \cos 1.6 \approx 2.107109452$$

Абсолютные погрешности:

$$\Delta_1 = I - I_{\text{пр}} = 0.000734548$$

$$\Delta_2 = I - I_{\text{тр}} = -0.001469452$$

$$\Delta_3 = I - I_{\text{Сим}} = 5.48 \cdot 10^{-7}$$

### 4) Определим количество узлов разбиения, при которых погрешность приближенного значения интеграла по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона составит 0,01.

Для формулы прямоугольников:

$$\frac{(b-a)h^2}{24} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \leq 0.01$$

$$\frac{0.8h^2}{24} \cdot 3.8 < 0.01$$

$$h < 0.281$$

$$n > \frac{2.4 - 1.6}{0.281}; \quad n \geq 3$$

Для формулы трапеций:

$$\frac{(b-a)h^2}{12} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \leq 0.01$$

$$\frac{0.8h^2}{12} \cdot 3.8 < 0.01$$

$$h < 0.199$$

$$n > \frac{2.4 - 1.6}{0.199}; \quad n \geq 5$$

Для формулы Симпсона:

$$\frac{(b-a)h^4}{2880} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f^{(IV)}(x)| \leq 0.01$$

$$\frac{0.8h^4}{2880} \cdot 5.25 \leq 0.01$$

$$h < 1.618$$

Так как формула Симпсона требует четного  $n$ , то

$$n \geq 2$$

Ответ.

	Формула прямоугольников	Формула трапеций	Формула Симпсона
Приближенное значение интеграла	2.107844	2.105640	2.107110
Оценка погрешности	0.000811	0.001622	$5.97 \cdot 10^{-7}$
Абсолютная погрешность	0.000734548	-0.001469452	$5.48 \cdot 10^{-7}$
Число интервалов разбиения для точности 0.01	$n \geq 3$	$n \geq 5$	$n \geq 2$