Тема: Дифференциальные уравнения

Задание. *Найти общее решение дифференциального уравнения*

$$xy' + x^2 + xy - y = 0.$$

Решение. Подберем интегрирующий множитель $\mu(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Тогда, после домножения на μ, уравнение примет вид:

$$x\mathrm{e}^{-x}\,dy = \mathrm{e}^{-x}(y - xy - x^2)\,dx.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x} x\mathrm{e}^{-x} = -x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{e}^{-x}(y - xy - x^2),$$

мы имеем уравнение в полных дифференциалах. Найдем его решение (восстановим "потенциальную"функцию U).

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x\mathrm{e}^{-x}, \Rightarrow U(x,y) = yx\mathrm{e}^{-x} + \varphi(x),$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y\mathrm{e}^{-x} - yx\mathrm{e}^{-x} + \varphi'(x) = \mathrm{e}^{-x}(y - xy - x^2), \Rightarrow \varphi'(x) = -x^2\mathrm{e}^{-x}.$$

Отсюда

$$\varphi(x) = \int -x^2\mathrm{e}^{-x}\,dx = \mathrm{e}^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C.$$

Окончательно получаем решение уравнения:

$$U(x,y) = yx\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C = 0,$$

или

$$y(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C}{x\mathrm{e}^{-x}}.$$