Теория поля. Циркуляция векторного поля

ЗАДАНИЕ.

Найти циркуляцию вектора F вдоль ориентированного контура L.

$$F=(3x-1)\vec{i}+(y-x+z)\vec{j}+4z\vec{k},$$

L − контур треугольника $ABCA$, где A,B,C − точки пересечения плоскости $2x-y-2z+2=0$ соответственно с осями координат Ox,Oy,Oz.

РЕШЕНИЕ.

По формуле Стокса искомая циркуляция равна следующему поверхностному интегралу второго рода:

$$\oint\limits_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

где P,Q,R − компоненты векторного поля F; S − произвольная поверхность, ограниченная заданным контуром L.

Вектор $\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ называется ротором векторного поля $F=(P,Q,R)$.

В нашем случае компоненты векторного поля равны

$$P(x,y,z)=3x-1,$$

$$Q(x,y,z) = y - x + z,$$

$$R(x,y,z) = 4z.$$

Ротор равен

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (0-1, 0-0, -1-0) = (-1, 0, -1).$$

Следовательно, циркуляция C равна

$$C = \iint\limits_S -dydz - dxdy = -\iint\limits_S dydz - \iint\limits_S dxdy.$$

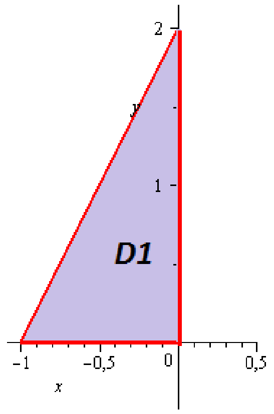
Поверхностью S будет служить треугольник ABC.

Запишем уравнение плоскости $2x - y - 2z + 2 = 0$ в виде уравнения плоскости в отрезках:

$$2x - y - 2z + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y - 2z = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{-1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1.$$

Таким образом, проекцией треугольника ABC на плоскость xOy будет треугольник D_1:

$$D_1 = \{(x,y): \quad 2x - y = -2, x \le 0, y \ge 0\}:$$



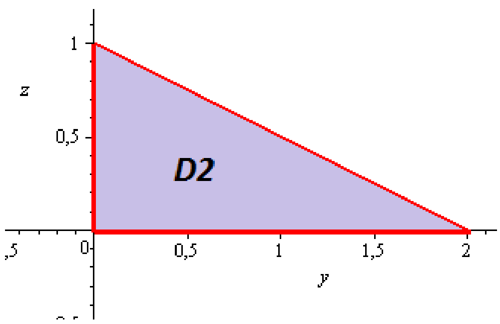
Так как нормаль к поверхности S в этом случае образует тупой угол с положительным направлением оси Ox, то при переходе к двойному интегралу ставим знак «минус».

Вычисляем поверхностный интеграл:

$$\iint_S dxdy = -\iint_{D_1} dxdy = -\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{2x+2} dy = -\int_{-1}^{0} (2x+2)dx = -x^2\Big|_{-1}^{0} - 2x\Big|_{-1}^{0} = -(0-1) - 2(0+1) = -1.$$

Проекцией треугольника ABC на плоскость yOz будет треугольник D_2:

$$D_2 = \{(y,z): \quad y + 2z = 2, y \ge 0, z \ge 0\}.$$



Вычисляем поверхностный интеграл:

$$\iint\limits_{S} dydz = \iint\limits_{D_2} dydz = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{1-\frac{1}{2}y} dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 (2-y)dy = y\Big|_0^2 - \frac{1}{4}y^2\Big|_0^2 = 2 - \frac{1}{4}\cdot 4 = 1.$$

Таким образом, циркуляция равна

$$C = -\iint\limits_{S} dydz - \iint\limits_{S} dxdy = -1-(-1) = 0\,.$$

Ответ: 0.