Аналитическая геометрия в пространстве
Пример решения задачи

Задача. *Найти угол между прямой* $\begin{cases} x-y+z-4=0; \\ 2x+y-2z+5=0 \end{cases}$ *и прямой, проходящей через точку (2, 1, -1) и начало координат.*

Решение.

Перейдем к каноническому уравнению прямой.

Пусть $x = 1$, тогда

$$\begin{cases} 1-y+z-4=0; \\ 2+y-2z+5=0. \end{cases} \quad \begin{cases} -y+z-3=0; \\ y-2z+7=0. \end{cases}$$

Сложим уравнения, получим $-z + 4 = 0$, $z = -4$.

$1 - y - 4 - 4 = 0$; $y = -7$.

(1; -7; -4) – точка прямой.

Направляющий вектор прямой найдем из условия:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = i + 4j + 3k,$$

То есть (1; 4; 3) – координаты направляющего вектора прямой.

Каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{4} = \frac{z+4}{3}; \quad \left(\frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{m_1} = \frac{z-z_0}{n_1}\right).$$

Уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку (2; 1; -1):

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1} \quad \left(\frac{x-x_0}{l_2} = \frac{y-y_0}{m_2} = \frac{z-z_0}{n_2}\right).$$

Угол между прямыми найдем по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} = \frac{1\cdot 2 + 4\cdot 1 + 3\cdot 1}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{6}} = \frac{9}{2\sqrt{39}};$$

$$\varphi = \arccos\frac{9}{2\sqrt{39}};$$

Ответ. $\arccos\frac{9}{2\sqrt{39}}$.