Решение задачи линейного программирования графическим методом, симплекс-методом и через «Поиск решения» в Excel

ЗАДАНИЕ.

Предприятие выпускает два вида продукции: Изделие 1 и Изделие 2. На изготовление единицы Изделия 1 требуется затратить a_{11} *кг сырья первого типа,* a_{21} *кг сырья второго типа,* a_{31} *кг сырья третьего типа.*

На изготовление единицы Изделия 2 требуется затратить a_{12} *кг сырья первого типа,* a_{22} *кг сырья второго типа,* a_{32} *кг сырья третьего типа.*

Производство обеспечено сырьем каждого типа в количестве b_1 *кг,* b_2 *кг,* b_3 *кг соответственно.*

Рыночная цена единицы Изделия 1 составляет c_1 *тыс. руб., а единицы Изделия 2 -* c_2 *тыс.руб.*

Требуется:

1) *построить экономико – математическую модель задачи;*
2) *составить план производства изделий, обеспечивающий максимальную выручку от их реализации при помощи графического метода решения задачи линейного программирования.*
3) *составить план производства изделий, обеспечивающий максимальную выручку от их реализации при помощи табличного симплекс – метода решения задачи линейного программирования.*
4) *составить план производства изделий, обеспечивающий максимальную выручку от их реализации, используя надстройку «Поиск решения» в среде MS EXCEL.*

$a_{11} = 2$	$a_{12} = 7$	$b_1 = 560$	$c_1 = 55$
$a_{21} = 3$	$a_{22} = 3$	$b_2 = 300$	$c_2 = 35$
$a_{31} = 5$	$a_{32} = 1$	$b_3 = 332$	

РЕШЕНИЕ.

1) ***Математическая модель задачи.***

<u>*Переменные задачи*</u>

В задаче требуется определить оптимальное число изделий каждого вида, обеспечивающее максимальную прибыль от их реализации, а значит, переменными задачи являются количество каждого вида изделий:

x_1 – количество изделий вида 1;

x_2 – количество изделий вида 2.

Целевая функция

Критерием эффективности служит параметр прибыли, который должен стремиться к *максимуму*. Чтобы рассчитать величину прибыли от реализации изделий, необходимо знать:

- выпускаемое количество изделий каждого вида, т.е. x_1 и x_2;
- прибыль от их реализации – согласно условию, соответственно 55 и 35 тыс. руб.

Таким образом, прибыль от реализации выпускаемых изделий вида 1 равна $55x_1$ тыс.руб., а от реализации изделий вида 2 – $35x_2$ тыс.руб. Поэтому запишем ЦФ в виде суммы прибыли от продажи каждого из видов изделий:

$Z(x) = 55x_1 + 35x_2 \to \max$

Ограничения

Возможное оптимальное количество изделий каждого вида x_1 и x_2 ограничивается следующими условиями:

- Заданными ресурсами - 1,2 и 3, которые используются на выпуск каждого вида изделия, не могут превышать общего запаса ресурсов;
- количество каждого вида изделия не может быть отрицательным.

Запишем эти ограничения в *математической* форме:

по расходу ресурса 1: $2x_1 + 7x_2 \le 560$,

по расходу ресурса 2: $3x_1 + 3x_2 \le 300$,

по расходу ресурса 3: $5x_1 + x_2 \le 332$

не отрицательность количества выпускаемых костюмов задаётся так:

$x_1 \ge 0$,

$x_2 \ge 0$.

Таким образом, *математическая модель* этой задачи имеет вид

$$Z(x) = 55x_1 + 35x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \le 560; \\ 3x_1 + 3x_2 \le 300; \\ 5x_1 + x_2 \le 332; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2)

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Так как переменные задачи x_1 и x_2 входят в целевую линейную функцию и ограничения задачи линейны, то соответствующая задача оптимизации – задача линейного программирования.

Построим в декартовой системе координат X_1OX_2 многоугольник решений, или допустимых планов, который является пересечением полуплоскостей - решений каждого из неравенств системы ограничений.

(1): $2x_1 + 7x_2 \le 560$. Сначала строится разделяющая прямая $2x_1 + 7x_2 = 560$. Для этого находим две точки, через которые она проходит:

x_1	0	280
x_2	80	0

Подставим точку (0;0) в неравенство (1): $0 \le 560$ - верно, поэтому стрелки указывают на полуплоскость к нулю.

(2): $3x_1 + 3x_2 \le 300$. Разделяющая прямая $3x_1 + 3x_2 = 300$, найдём точки:

x_1	0	100
x_2	100	0

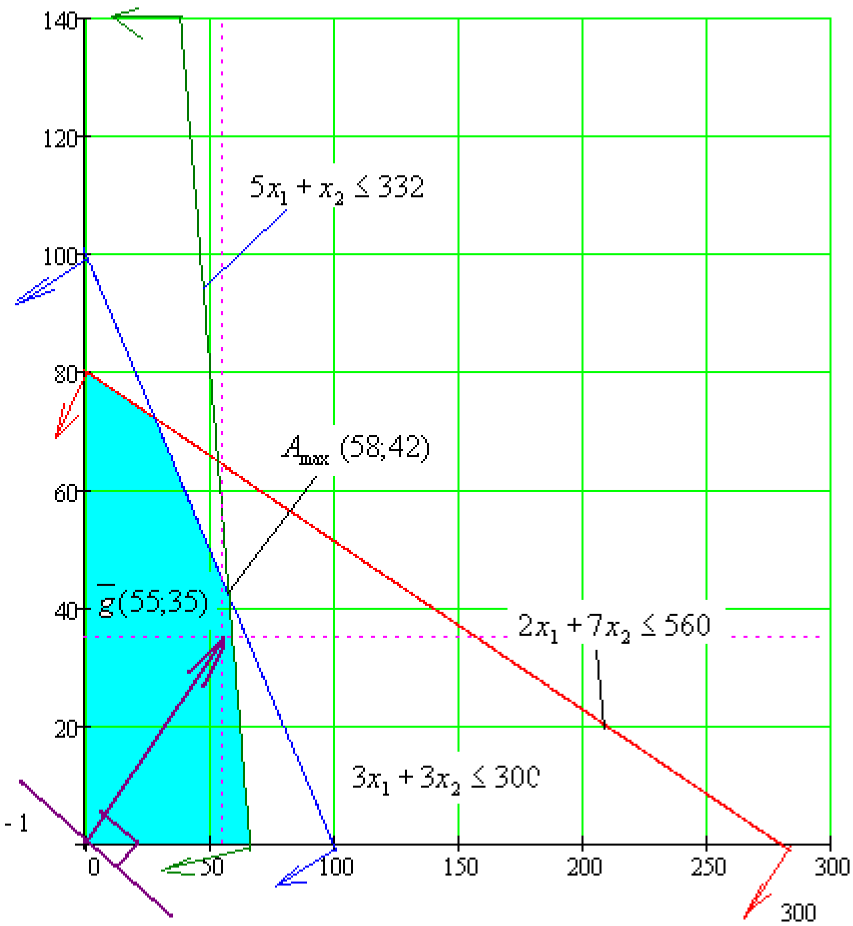
Подставим точку (0;0) в неравенство (2): $0 \le 300$ - верно, поэтому стрелки указывают на полуплоскость к нулю.

(3): $5x_1 + x_2 \le 332$. Разделяющая прямая $5x_1 + x_2 = 332$, найдём точки:

x_1	0	66,4
x_2	332	0

Подставим точку (0;0) в неравенство (3): $0 \le 332$ - верно, поэтому стрелки указывают на полуплоскость к нулю.

Находим многоугольник, в котором пересекаются, накладываются друг на друга все построенные полуплоскости. Многоугольник допустимых решений заштриховывается.



Построим градиент и линию уровня функции цели: $Z(X) = 55x_1 + 35x_2 \Rightarrow \bar{g}(55;35)$. Градиент всегда изображается с началом в т.(0;0). Любая линия уровня перпендикулярна градиенту. Удобно построить линию уровня $Z = 0$, также проходящую через начало координат: $55x_1 + 35x_2 = 0$.

Перемещаем мысленно или с помощью линейки линию уровня так, чтобы найти угловые точки многоугольника допустимых планов, координаты которых доставляют максимальное значение функции цели. В данной задаче линия уровня перемещается в направлении за градиентом, поэтому её значения будут увеличиваться от линии к линии. Следовательно, в точке А будет наибольшее значение. Найдём координаты точки А, как точки пересечения разделяющих прямых:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 300 \\ 5x_1 + x_2 = 332 \end{cases}$$

Второе уравнение умножим на (-3):

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 300 \\ -15x_1 - 3x_2 = -996 \end{cases}$$

сложим уравнения

$$-12x_1 = -696$$
$$x_1 = 58$$
$$x_2 = 332 - 5x_1 = 332 - 5 \cdot 58 = 42$$

Следовательно, $A_{\max}(58;42)$, $Z_{\max}(58;42) = 55 \cdot 58 + 35 \cdot 42 = 4660$.

Ответ: изделия вида 1 необходимо выпускать в количестве 58 единиц, а изделия вида 2 в количестве 42 единицы. При этом прибыль от их реализации максимальная и составит 4660 тыс. руб.

3)

СИМПЛЕКС – МЕТОД

Приводим задачу к каноническому виду, для этого в каждое неравенство вводим дополнительную переменную со знаком плюс: x_3, x_4, x_5.

$$Z(x) = 55x_1 + 35x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 560; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_4 = 300; \\ 5x_1 + x_2 + x_5 = 332; \\ x_1 \geq 0; \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Дальнейшее решение будем вести в симплекс – таблицах.

Таблица 1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				55	35	0	0	0		
2	**Базис**	**Сб**	**B**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**Отношения**	**Коэфф.**
3	x3	0	560	2	7	1	0	0	280	0,4
4	x4	0	300	3	3	0	1	0	100	0,6
5	x5	0	332	5	1	0	0	1	66,4	-
6		Zmax	0	-55	-35	0	0	0		

Так как задача на нахождение максимального значения, то в индексной строке выбираем наибольшую по модулю отрицательную оценку – это столбец с переменной x_1 (таблица 1). Выделяем его.

Далее находим оценочные отношения, путём деления столбца C на столбец D, которые записываем в предпоследний столбец таблицы, из которых выбираем наименьшее из них – это 66,4 – третья строка. Выделяем её. В последнем столбце запишем пересчитывающие коэффициенты: $\frac{2}{5} = 0{,}4; \frac{3}{5} = 0{,}6$, которые необходимы при пересчёте всех невыделенных элементов. Третью строку делим на 5. Из базиса выводим переменную x_5, при этом в базис вводим переменную x_1. Все невыделенные элементы пересчитываем по методу Гаусса, например для первой строки: $560 - 332 \cdot 0{,}4 = 427{,}2$, $2 - 5 \cdot 0{,}4 = 0$ и так все элементы. В результате перейдём к таблице 2.

Таблица 2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				55	35	0	0	0		
2	**Базис**	**Сб**	**В**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**Отношения**	**Коэфф.**
8	x3	0	427,2	0	6,6	1	0	-0,4	64,72727273	2,75
9	x4	0	100,8	0	2,4	0	1	-0,6	42	-
10	x1	55	66,4	1	0,2	0	0	0,2	332	0,083333
11		Zmax	3652	0	-24	0	0	11		

Так как в индексной строке присутствует отрицательная оценка, план не оптимален. Требуется улучшение плана. Выделяем столбец с переменной x_2. Далее находим оценочные отношения делением столбца C на столбец E, среди которых наименьшее 42 - вторая строка. Выделяем её. Элементы строки 2 делим на 2,4. Из базиса выводим переменную x_4, при этом в базис вводим переменную x_2. Получим таблицу 3.

Таблица 3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				55	35	0	0	0		
2	**Базис**	**Сб**	**В**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**Отношения**	**Коэфф.**
14	x3	0	150	0	0	1	-2,75	1,25		
15	x2	35	42	0	1	0	0,416667	-0,25		
16	x1	55	58	1	0	0	-0,08333	0,25		
17		Zmax	4660	0	0	0	10	5		

Так как в индексной строке все оценки положительные или равны нулю, план оптимален: $Z_{\max}(58;42) = 4660$, ответ такой же как и при решении графическим методом.

4)

ПРИМЕНЕНИЕ НАДСТРОЙКИ «ПОИСК РЕШЕНИЯ» MS EXCEL

Для решения рассмотренной задачи в среде Excel заполним ячейки исходными данными (в виде таблицы) и формулами математической модели.

Excel позволяет получить оптимальное решение без ограничения размерности системы неравенств и целевой функции.

Таблица в режиме чисел

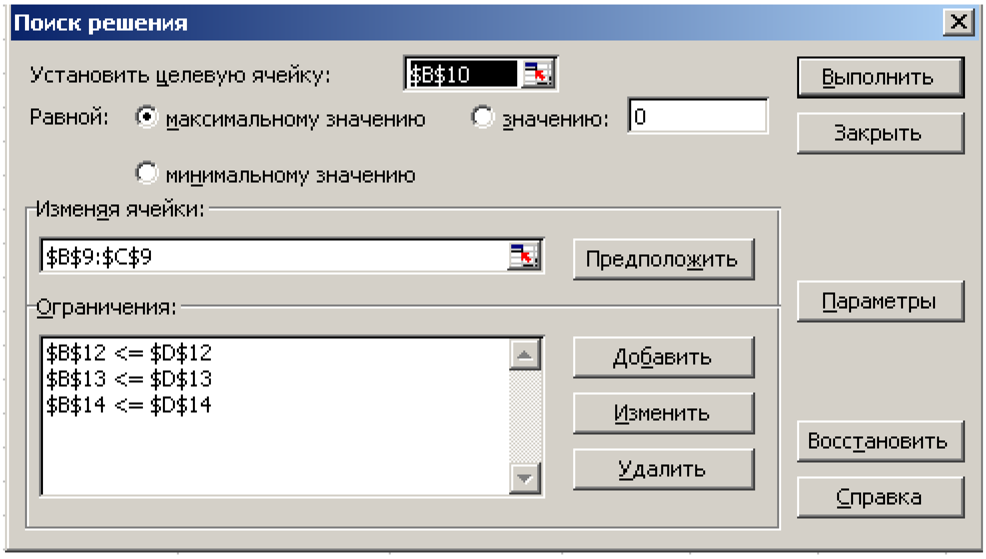
	A	B	C	D
1	Ресурсы	Вид изделия		Запасы
2		Изделие1	Изделие2	
3	1	2	7	560
4	2	3	3	300
5	3	5	1	332
6	Прибыль, тыс.руб.	55	35	
7				
8				
9	План	1	1	
10	Функция цели	90		
11				
12	Ограничения	9	<=	560
13		6	<=	300
14		6	<=	332
15				

Таблица в режиме формул

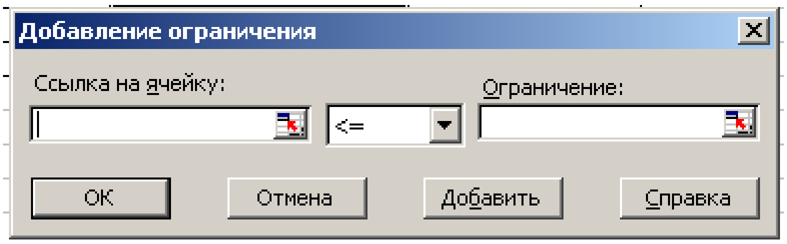
	A	B	C	D
1	Ресурсы	Вид изделия		Запасы
2		Изделие1	Изделие2	
3	1	2	7	560
4	2	3	3	300
5	3	5	1	332
6	Прибыль, тыс.руб.	55	35	
7				
8				
9	План	1	1	
10	Функция цели	=СУММПРОИЗВ(B6:C6;B9:C9)		
11				
12	Ограничения	=СУММПРОИЗВ(B3:C3;B9:C9)	<=	560
13		=СУММПРОИЗВ(B4:C4;B9:C9)	<=	300
14		=СУММПРОИЗВ(B5:C5;B9:C9)	<=	332

Здесь: B9:C9 – результат (оптимальное количество изделий каждого вида);
B6:C6 – коэффициенты целевой функции;
B10 – значение целевой функции;
B3:C5 – коэффициенты ограничений;
D12:D14 – правая часть ограничений;
B12:B14 – вычисляемые (фактические) значения левой части ограничений.

Решим задачу с помощью команды меню **Сервис / Поиск решения**. Итак, делаем активной ячейку B10. Выполняем команду **Сервис / Поиск решения.** На экране появляется диалоговое окно **Поиск решения**.



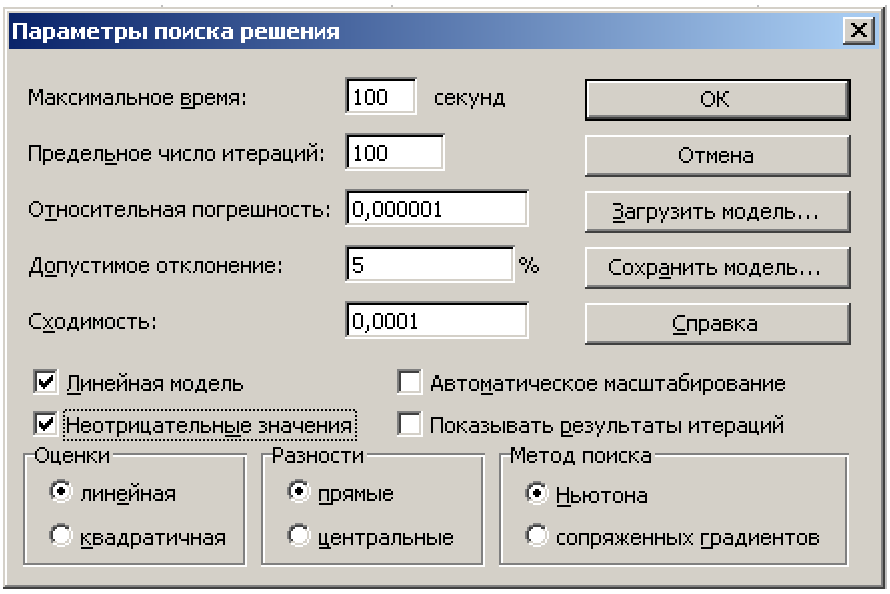
В поле **Установить целевую** будет показана ссылка на активную ячейку, то есть на B10. Причём эта ссылка абсолютная (мы видим $B$10). В секции **Равной**: устанавливаем переключатель **максимальному значению**. Можно задать не только максимальное/минимальное значения, но и любую произвольную величину, введя её в специальное поле **значению** в секции **Равной**:. Ограничения устанавливаются с помощью кнопки **Добавить**, которая вызывает диалоговое окно их ввода **Добавление ограничения**.



В поле ввода **Ссылка на ячейку**: указывается адрес ячейки, содержащей формулу левой части ограничения. Затем выбирается из списка знак соотношения. В поле **Ограничение**: указывается адрес ячейки, содержащей правую часть ограничения. Щёлкаем на кнопку **Добавить** и повторяем для следующего ограничения.

После ввода всех ограничений следует щёлкнуть кнопку **ОК**.

Так как все переменные несут условие не отрицательности, то их положительность задаём через кнопку **Параметры** в окне диалога **Поиск решения**. После щелчка на ней, на экране окно **Параметры поиска решения**.



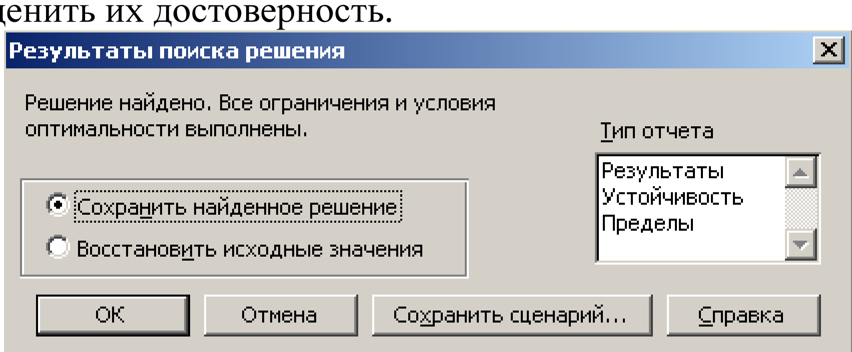
Устанавливаем флажки **Линейная модель** и **Неотрицательные значения,** соглашаясь с остальными установками по умолчанию.

Щёлкаем на кнопке **ОК**.

После этого произойдёт переключение в окно **Поиск решения**, в котором необходимо щёлкнуть кнопку **Выполнить** для решения поставленной задачи.

Excel предъявит окно **Результаты поиска решения** с сообщением о том, что решение найдено, или о том, что не может найти подходящего решения.

Если вычисления оказались успешными, Excel предъявит следующее окно итогов. Их можно сохранить или отказаться (**Восстановить исходные значения**). Кроме того, можно получить один из трёх видов отчётов (**Результаты, Устойчивость, Пределы**), позволяющие лучше осознать полученные результаты, в том числе, оценить их достоверность.



После найденного решения, в ячейках B9:C9 появится оптимальное количество изделий каждого вида. Покажем это.

	A	B	C	D
1	Ресурсы	Вид изделия		Запасы
2		Изделие1	Изделие2	
3	1	2	7	560
4	2	3	3	300
5	3	5	1	332
6	Прибыль, тыс.руб.	55	35	
7				
8				
9	План	58	42	
10	Функция цели	4660		
11				
12	Ограничения	410	<=	560
13		300	<=	300
14		332	<=	332

При сохранении отчёта выбрали вид отчёта – **Отчёт по результатам.**

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам**						
2	**Рабочий лист: [201.xls]Лист3**						
3	**Отчет создан: 24.12.2012 20:02:31**						
4							
5							
6	Целевая ячейка (Максимум)						
7		**Ячейка**	**Имя**	**Исходное значение**	**Результат**		
8		$B$10	Функция цели Изделие1	90	4660		
9							
10							
11	Изменяемые ячейки						
12		**Ячейка**	**Имя**	**Исходное значение**	**Результат**		
13		$B$9	План Изделие1	1	58		
14		$C$9	План Изделие2	1	42		
15							
16							
17	Ограничения						
18		**Ячейка**	**Имя**	**Значение**	**Формула**	**Статус**	**Разница**
19		$B$12	Ограничения Изделие1	410	$B$12<=$D$12	не связан.	150
20		$B$13	Изделие1	300	$B$13<=$D$13	связанное	0
21		$B$14	Изделие1	332	$B$14<=$D$14	связанное	0

Из отчёта видно, что ресурс 1 не используется полностью на 150 кг, а ресурсы 2 и 3 используются полностью.

Получили оптимальный план, при котором изделий первого вида необходимо выпустить в количестве 58 шт., а изделий второго вида в количестве 42 шт. При этом прибыль от их реализации максимальная и составит 4660 тыс.руб.