Тема: Операционное исчисление

ЗАДАНИЕ. *Найти решение задачи Коши методами операционного исчисления*

$x''+2x'+2x=te^{-t};$
$x(0)=0,\ x'(0)=0.$

РЕШЕНИЕ:
Перейдем к изображениям:
$x(t)\Leftrightarrow X(p)$,
$x'(t)\Leftrightarrow pX(p)-x(0)=pX(p)$,
$x''(t)\Leftrightarrow p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)$,
$te^{-t}=\dfrac{1}{(p+1)^2}$.
Подставляем все и получаем обычное уравнение:

$$p^2X(p)+2pX(p)+2X(p)=\frac{1}{(p+1)^2},$$

$$\left(p^2+2p+2\right)X(p)=\frac{1}{(p+1)^2},$$

$$X(p)=\frac{1}{(p+1)^2\left(p^2+2p+2\right)}$$

Разложим дробь $X(p)=\dfrac{1}{(p+1)^2\left(p^2+2p+2\right)}$ на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$X(p)=\frac{1}{(p+1)^2\left(p^2+2p+2\right)}=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{(p+1)^2}+\frac{Cp+D}{p^2+2p+2},$$

$$1=A(p+1)(p^2+2p+2)+B(p^2+2p+2)+(Cp+D)(p+1)^2,$$

$$1=A(p^3+2p^2+2p+p^2+2p+2)+B(p^2+2p+2)+C(p^3+2p^2+p)+D(p^2+2p+1),$$

$$1=A(p^3+3p^2+4p+2)+B(p^2+2p+2)+C(p^3+2p^2+p)+D(p^2+2p+1).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях p справа и слева и получаем систему для нахождения коэффициентов:

$$\begin{cases} A+C=0, \\ 3A+B+2C+D=0, \\ 4A+2B+C+2D=0, \\ 2A+2B+D=1; \end{cases}$$

Находим решение:

$$\begin{cases} A=0 \\ B=1, \\ C=0, \\ D=-1. \end{cases}$$

Получили

$$X(p)=\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{p^2+2p+2}.$$

Возвращаемся к оригиналам:

$$X(p)=\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{p^2+2p+2}=\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{(p+1)^2+1}\Leftrightarrow te^{-t}-e^{-t}\sin t=x(t).$$

Решение задачи Коши: $x(t)=te^{-t}-e^{-t}\sin t$.