

### Пример решения интегрального уравнения

ЗАДАНИЕ.

*Исследовать решения уравнения с вырожденным ядром при различных значениях параметра  $\lambda$  (ограничиться случаем вещественных характеристических чисел)*

$$y(x) - \lambda \int_0^1 xy(t) dt = \sin 2\pi x .$$

РЕШЕНИЕ.

В данном случае имеем:

$$y(x) = \lambda x C + \sin 2\pi x ,$$

(3.16.1)

где  $C = \int_0^1 y(t) dt$ .

(3.16.2)

Подставляя выражение (3.16.1) в выражение (3.16.2), получим:

$$C = \int_0^1 (\lambda t C + \sin 2\pi t) dt = \lambda C \int_0^1 t dt + \int_0^1 \sin 2\pi t dt = \lambda C \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2\pi} \cos 2\pi t \Big|_0^1 = \frac{\lambda C}{2} ,$$
$$C \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right) = 0 .$$

Число  $\lambda = 2$  является характеристическим числом соответствующего однородного уравнения.

При  $\lambda = 2$  решение интегрального уравнения имеет вид:

$$y(x) = 2xC + \sin 2\pi x , \text{ где } C - \text{ произвольная постоянная.}$$

При  $\lambda \neq 2$  получаем, что  $C = 0$  и исходное интегральное уравнение имеет единственное решение:

$$y(x) = \sin 2\pi x .$$