

Решение дифференциального уравнения в Maple

Задание

Найти решение дифференциального уравнения с граничными условиями

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in (a, b),$$

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_N,$$

где

$$a = 0,$$

$$b = 0,5,$$

$$y_0 = 0,$$

$$y_N = 0,5 \sin(0,5),$$

$$p(x) = 2x,$$

$$q(x) = -1,$$

$$f(x) = 2(x^2 + 1) \cos(x).$$

Требуется построить на одном графике решение, полученное итерационно и с помощью функции dsolve.

Решение

Решать будем методом итераций.

Для решения заменим производные функции $y(x)$ выражениями:

$$y''(x_k) \approx \frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2},$$

$$y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h},$$

где $y_k = y(x_k)$, $x_k = a + k \cdot h$, $h = (b - a) / N$. Подставим в исходное дифференциальное уравнение, получим

$$\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2} + p_k \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + q_k y_k = f_k,$$

$$y_0 = 0,$$

$$y_N = y_N,$$

здесь $p_k = p(x_k)$, $q_k = q(x_k)$, $f_k = f(x_k)$. Приведем подобные слагаемые, получим следующую систему, которую будем решать итерационно:

$$y_0 = 0,$$

$$y_k = \frac{-y_{k-1}(1 - p_k h / 2) - y_{k+1}(1 + p_k h / 2) + f_k h^2}{h^2 q_k - 2},$$

$$y_N = y_N.$$

В качестве начального приближения, положив $y_{k-1} = 0$, $y_{k+1} = 0$, выберем

Данная работа выполнена на сайте www.matburo.ru
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
https://www.matburo.ru/ex_mat_pr.php?p1=maple
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$y_0^0 = 0,$$

$$y_k^0 = \frac{f_k h^2}{h^2 q_k - 2},$$

$$y_N^0 = y_N.$$

Тогда i -е приближение:

$$y_0^i = 0,$$

$$y_k^i = \frac{-y_{k-1}^{i-1}(1 - p_k h/2) - y_{k+1}^{i-1}(1 + p_k h/2) + f_k h^2}{h^2 q_k - 2},$$

$$y_N^i = y_N.$$

Алгоритм программы

1) Зададим начальные условия и дифференциальное уравнение, зададим значения переменных.

2) Используя функцию dsolve с параметром numeric, получим численное решение дифференциального уравнения. Командой eval преобразуем его к виду, пригодному для построения графика.

3) Создадим график решения, полученного при помощи dsolve.

4) Получим решение итерационно. Для этого:

4.1. зададим значение количества точек N , и количества итераций M .

4.2. Получим начальное приближение и запишем его в $y2$.

4.3. Сохраним значение $y2$ в $y1$ и получим итерационное решение.

Процедура повторяется M раз. Для построения графика решение сохраняется в SOL.

5) Создадим график решения в виде точек.

6) Построим графики решения на одной координатной плоскости.

7) Выведем значения x_k и y_k

Заметим, что индекс k в тексте программы меняется не с 0, а с 1, так как в Maple нумерация элементов начинается с 1.

Данная работа выполнена на сайте www.matburo.ru
Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
https://www.matburo.ru/ex_mat_pr.php?p1=maple
©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Текст программы

```
with(plots): # подключение библиотеки для построения графиков
# Условие
a:=0;
b:=0.5;
y0:=0;
yN:=0.5*sin(0.5);
p:=x->2*x;
q:=x->-1;
f:=x->2*(x^2+1)*cos(x);
eq:=diff(y(x),x,x)+p(x)*diff(y(x),x)+q(x)*y(x)=f(x); #дифференциальное уравнение
Y:=dsolve({eq,y(a)=y0,y(b)=yN},numeric,output=listprocedure);#решение
дифференциального уравнения с использованием dsolve
Y2:=eval(y(x),Y); #создание графика решения, полученного при помощи dsolve
Plot1:=plot(Y2(x),x=0..0.5);
# Итерационное решение
N:=10; #разобьем отрезок [a,b]=[0,0.5] на N=10 частей
h:=(b-a)/N; #шаг
M:=100; #количество итераций

# начальное приближение решения
xk[1]:=a;xk[N+1]:=b;
y2[1]:=y0;y2[N+1]:=yN;
for k from 1+1 to N-1+1 do
  xk[k]:=a+h*(k-1);
  y2[k]:=f(xk[k])*h^2/(h^2*q(xk[k])-2);
end do;
for k from 1 to N+1 do
SOL[k,1]:=xk[k];
SOL[k,2]:=y2[k];
end do;

#итерационный метод решения системы уравнений, M - число итераций
for i from 1 to M do
  for k from 1 to N+1 do # сохраняем значения, полученные на предыдущей итерации в y1
    y1[k]:=y2[k];
  end do;
  for k from 1+1 to N-1+1 do #вычисляем y2, решая систему методом итераций

y2[k]:=(-y1[k-1]*(1-p(xk[k])*h/2)-y1[k+1]*(1+p(xk[k])*h/2)+f(xk[k])*h^2)/(h^2*q(xk[k])-2);

  end do;
  for k from 1 to N+1 do
    SOL[k,1]:=xk[k];
    SOL[k,2]:=y2[k];
  end do;
end do;
# создание графика решения, точки
```

Данная работа выполнена на сайте www.matburo.ru
Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
https://www.matburo.ru/ex_mat_pr.php?p1=maple
©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

```
SOL :=convert(SOL,array):  
Plot2:=plot(SOL,x=0..0.5, style = point);  
#отображения графиков решений, полученных с использованием dsolve (сплошная  
кривая) и итерационно (точки)  
display([Plot1,Plot2]);  
eval(SOL);# вывод на экран значения xk и yk
```