

Задача о назначениях. Решение методом ветвей и границ

ЗАДАНИЕ.

Четыре работника должны выполнять четыре вида работ. Назначить работников на работы методами динамического программирования и ветвей и границ таким образом, чтобы затраты труда были минимальны

7	7	3	6
4	9	5	4
5	5	4	5
6	4	7	2

РЕШЕНИЕ. Используем *метод динамического программирования*, а именно – *метод ветвей и границ* для решения данной задачи назначения работников.

Шаг 1. Выпишем затраты труда для выполнения 1 работы всеми работниками:

i_1	1	2	3	4
$F_1(i_1)$	7	4	5	6

Шаг 2. Сравним на второй работе первого работника со всеми остальными:

$$F_2(i_1, i_2) = \min \begin{cases} C_{i_1, 2} + F_1(i_2) \\ C_{i_2, 2} + F_1(i_1) \end{cases}$$

Получаем

$$F_2(1, 2) = \min \begin{cases} C_{1, 2} + F_1(2) = 7 + 4 = 11 \\ C_{2, 2} + F_1(1) = 9 + 7 = 16 \end{cases} = 11,$$

$$F_2(1, 3) = \min \begin{cases} C_{1, 2} + F_1(3) = 7 + 5 = 12 \\ C_{3, 2} + F_1(1) = 5 + 7 = 12 \end{cases} = 12$$

$$F_2(1, 4) = \min \begin{cases} C_{1, 2} + F_1(4) = 7 + 6 = 13 \\ C_{4, 2} + F_1(1) = 4 + 7 = 11 \end{cases} = 11$$

$$F_2(2, 3) = \min \begin{cases} C_{2, 2} + F_1(3) = 9 + 5 = 14 \\ C_{3, 2} + F_1(2) = 5 + 4 = 9 \end{cases} = 9$$

$$F_2(2, 4) = \min \begin{cases} C_{2, 2} + F_1(4) = 9 + 6 = 15 \\ C_{4, 2} + F_1(2) = 4 + 4 = 8 \end{cases} = 8$$

$$F_2(3, 4) = \min \begin{cases} C_{3, 2} + F_1(4) = 5 + 6 = 11 \\ C_{4, 2} + F_1(3) = 4 + 5 = 9 \end{cases} = 9$$

Шаг 3. Сравним на третьей работу первого работника со всеми остальными:

$$F_3(i_1, i_2, i_3) = \min \begin{cases} C_{i1,3} + F_2(i_2, i_3) \\ C_{i2,3} + F_2(i_1, i_3) \\ C_{i3,3} + F_2(i_1, i_2) \end{cases}$$

Получаем:

$$F_3(1, 2, 3) = \min \begin{cases} C_{1,3} + F_2(2, 3) = 3 + 9 = 12 \\ C_{2,3} + F_2(1, 3) = 5 + 12 = 17 \\ C_{3,3} + F_2(1, 2) = 4 + 11 = 15 \end{cases} = 12$$

$$F_3(1, 2, 4) = \min \begin{cases} C_{1,3} + F_2(2, 4) = 3 + 8 = 11 \\ C_{2,3} + F_2(1, 4) = 5 + 11 = 16 \\ C_{4,3} + F_2(1, 2) = 7 + 11 = 18 \end{cases} = 11$$

$$F_3(1, 3, 4) = \min \begin{cases} C_{1,3} + F_2(3, 4) = 3 + 9 = 12 \\ C_{3,3} + F_2(1, 4) = 4 + 11 = 15 \\ C_{4,3} + F_2(1, 3) = 7 + 12 = 19 \end{cases} = 12$$

$$F_3(2, 3, 4) = \min \begin{cases} C_{2,3} + F_2(3, 4) = 5 + 9 = 14 \\ C_{3,3} + F_2(2, 4) = 4 + 8 = 12 \\ C_{4,3} + F_2(2, 3) = 7 + 9 = 16 \end{cases} = 12$$

Шаг 4. Сравним на четвертой работе первого работника со всеми остальными:

$$F_4(i_1, i_2, i_3, i_4) = \min \begin{cases} C_{i1,4} + F_3(i_2, i_3, i_4) \\ C_{i2,4} + F_3(i_1, i_3, i_4) \\ C_{i3,4} + F_3(i_1, i_2, i_4) \\ C_{i4,4} + F_3(i_1, i_2, i_3) \end{cases}$$

Получаем:

$$F_4(1, 2, 3, 4) = \min \begin{cases} C_{1,4} + F_3(2, 3, 4) = 6 + 12 = 18 \\ C_{2,4} + F_3(1, 3, 4) = 4 + 12 = 16 \\ C_{3,4} + F_3(1, 2, 4) = 5 + 11 = 16 \\ C_{4,4} + F_3(1, 2, 3) = 2 + 12 = 14 \end{cases} = 14$$

Минимальному значению соответствует $C_{4,4}$, поэтому назначаем 4 работника на 4 работу.

Идем в обратную сторону и получаем назначение:

4 работник – 4 работа

1 работник – 3 работа

3 работник – 2 работа

2 работник – 1 работа

Минимальные затраты труда 14.

Используем *метод ветвей и границ*.

Шаг 1. Рассчитываем φ_0 как минимальную сумму наименьших стоимостей выполнения всех работ одним работником или выполнения одной работы всеми работниками.

$$\varphi_0 = \min \left\{ \begin{array}{l} \sum \min \text{ элементов по строкам} \\ \sum \min \text{ элементов по столбцам} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 3+4+4+2=13 \\ 4+4+3+2=13 \end{array} \right\} = 13.$$

Начинаем строить дерево, исходя из нулевого уровня, при котором $\varphi_0=13$.

Шаг 2. Делаем попытку назначить 1 работника на каждую работу. Для этого вычеркиваем 1 строку и j столбец, в зависимости от того, на какую работу назначаем работника.

$$\varphi_{1j} = C_{1j} + \min \left\{ \begin{array}{l} \sum \min \text{ элементов по оставшимся строкам} \\ \sum \min \text{ элементов по оставшимся столбцам} \end{array} \right\}$$

Получаем:

$$\varphi_{11} = [C_{11} = 7] + \min \left\{ \begin{array}{l} 4+4+2=10 \\ 4+4+2=10 \end{array} \right\} = 17$$

$$\varphi_{12} = [C_{12} = 7] + \min \left\{ \begin{array}{l} 4+4+2=10 \\ 4+4+2=10 \end{array} \right\} = 17$$

$$\varphi_{13} = [C_{13} = 3] + \min \left\{ \begin{array}{l} 4+5+2=11 \\ 4+4+2=10 \end{array} \right\} = 13$$

$$\varphi_{14} = [C_{14} = 6] + \min \left\{ \begin{array}{l} 4+4+4=12 \\ 4+4+4=12 \end{array} \right\} = 18$$

Так как минимальное значение достигается в случае $\varphi_{13} = [C_{13} = 3] = 10$, назначаем первого работника на 3 работу. Остальные ветви 1 уровня отсекаем.

Шаг 3. Делаем попытку назначить 2 работника на оставшиеся работы (1,2,4). Для этого вычеркиваем 1 строку и 3 столбец, так как это назначение уже сделано, и вычеркиваем 2 строку и j столбец, в зависимости от того, на какую работу назначаем 2 работника.

$$\varphi_{2j} = C_{13} + C_{2j} + \min \left\{ \begin{array}{l} \sum \min \text{ элементов по оставшимся строкам} \\ \sum \min \text{ элементов по оставшимся столбцам} \end{array} \right\}$$

Получаем:

$$\varphi_{21} = 3 + 4 + \min \left\{ \begin{array}{l} 5 + 2 = 7 \\ 4 + 2 = 6 \end{array} \right\} = 13$$

$$\varphi_{22} = 3 + 9 + \min \left\{ \begin{array}{l} 5 + 2 = 7 \\ 5 + 2 = 7 \end{array} \right\} = 19$$

$$\varphi_{24} = 3 + 4 + \min \left\{ \begin{array}{l} 5 + 4 = 9 \\ 5 + 4 = 9 \end{array} \right\} = 16.$$

Минимальное значение $\varphi_{21} = 13$, поэтому назначаем второго работника на 1 работу, а остальные ветви отсекаем.

Шаг 4. Делаем попытку назначить 3 работника на оставшиеся работы (2 и 4).

Вычеркиваем 1 и 2 строки, 1 и 3 столбец, так как эти назначения уже произведены.

Вычеркиваем третью строку и j столбец, в зависимости от того, на какую работу назначаем 3 работника.

$$\varphi_{3j} = C_{13} + C_{21} + C_{3j} + \min \left\{ \begin{array}{l} \sum \min \text{ элементов по оставшимся строкам} \\ \sum \min \text{ элементов по оставшимся столбцам} \end{array} \right\}$$

Получаем:

$$\varphi_{32} = 3 + 4 + 5 + \min \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \right\} = 14$$

$$\varphi_{34} = 3 + 4 + 5 + \min \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 4 \end{array} \right\} = 16$$

Так как минимальное значение достигается при $\varphi_{32} = 14$, то назначаем третьего работника на вторую работу, а остальные ветви 3 уровня отсекаем.

Шаг 5. Четвертый работник назначается на оставшуюся работу, в данном случае, на 4 работу. $\varphi_{44} = C_{13} + C_{21} + C_{32} + C_{44} = 3 + 4 + 5 + 2 = 14$.

Получаем назначение:

4 работник – 4 работа

1 работник – 3 работа

3 работник – 2 работа

2 работник – 1 работа

Минимальные затраты труда 14.