

Нахождение оригинала изображения (преобразование Лапласа)

ЗАДАНИЕ.

Найти оригинал изображения $F(p) = \frac{15p^2 + 3p + 34}{(p^2 + 4p + 8)(p^2 - 6p + 5)}$

РЕШЕНИЕ.

Разложим дробь на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned}\frac{15p^2 + 3p + 34}{(p^2 + 4p + 8)(p^2 - 6p + 5)} &= \frac{15p^2 + 3p + 34}{(p^2 + 4p + 8)(p-1)(p-5)} = \frac{Ap+B}{p^2+4p+8} + \frac{C}{p-1} + \frac{D}{p-5}, \\ 15p^2 + 3p + 34 &= (Ap+B)(p^2 - 6p + 5) + C(p-5)(p^2 + 4p + 8) + D(p-1)(p^2 + 4p + 8), \\ 15p^2 + 3p + 34 &= A(p^3 - 6p^2 + 5p) + B(p^2 - 6p + 5) + C(p^3 + 4p^2 + 8p - 5p^2 - 20p - 40) + \\ &+ D(p^3 + 4p^2 + 8p - p^2 - 4p - 8) \\ 15p^2 + 3p + 34 &= A(p^3 - 6p^2 + 5p) + B(p^2 - 6p + 5) + C(p^3 - p^2 - 12p - 40) + \\ &+ D(p^3 + 3p^2 + 4p - 8)\end{aligned}$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях p справа и слева:

$$\begin{cases} A + C + D = 0, \\ -6A + B - C + 3D = 15, \\ 5A - 6B - 12C + 4D = 3, \\ 5B - 40C - 8D = 34. \end{cases}$$

Решая систему, находим:

$$\begin{cases} A = -1, \\ B = 2, \\ C = -1, \\ D = 2. \end{cases}$$

Таким образом,

Задача по операционному исчислению скачана с
https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=maoper

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$\begin{aligned}F(p) &= \frac{15p^2 + 3p + 34}{(p^2 + 4p + 8)(p^2 - 6p + 5)} = \frac{-p + 2}{p^2 + 4p + 8} + \frac{-1}{p - 1} + \frac{2}{p - 5} = \\&= -\frac{p - 2}{(p + 2)^2 + 2^2} + \frac{-1}{p - 1} + \frac{2}{p - 5} = \\&= -\frac{p + 2}{(p + 2)^2 + 2^2} + 2\frac{2}{(p + 2)^2 + 2^2} - \frac{1}{p - 1} + 2\frac{1}{p - 5} \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow -e^{-2t} \cos 2t + 2e^{-2t} \sin 2t - e^t + 2e^{-5t}.\end{aligned}$$

ОТВЕТ.

$$f(t) = -e^{-2t} \cos 2t + 2e^{-2t} \sin 2t - e^t + 2e^{-5t}.$$