

Многокритериальная оптимизация, оптимальность по Парето

ЗАДАНИЕ.

Возможные значения курса базовой валюты в течении ближайшего года представлены четырьмя интервалами. Банк рассматривает четыре инвестиционных проекта, каждый из которых связан с международным бизнесом. Последствия от принятия банком i -го инвестиционного проекта при условии, что курс валюты окажется в j -м интервале, приведены в таблице 1. В таблице 2 приведены прогнозируемые экспертами вероятности возможных интервалов курса базовой валюты.

Таблица 1

№ проекта	Вариант обменного курса			
	1	2	3	4
1	0	4	5	20
2	0	4	8	32
3	0	8	12	24
4	-6	-2	4	8

Таблица 2

Вероятности вариантов обменного курса			
1	2	3	4
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$

Требуется построить матрицу сожалений, найти решения, рекомендуемые правила Вальда, Сэвиджа, максимального ожидаемого дохода и минимального ожидаемого риска, а также определить проекты, оптимальные по Паретто.

РЕШЕНИЕ.

Составим матрицу сожалений. Имеем:

$$q_1 = \max q_{k1} = 0$$

$$q_2 = 8$$

$$q_3 = 12$$

$$q_4 = 32$$

Матрица сожалений примет вид:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & 12 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 6 & 10 & 8 & 24 \end{pmatrix}$$

По правилу Вальда (правилу крайнего пессимизма) будем полагать, что при принятии i -го решения на самом деле складывается самая плохая ситуация, т.е. приносящая наименьший доход $a_i = \min_j q_{ij}$, и выберем решение i_0 с наибольшим a_{i_0} . Имеем:

$$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = -6.$$

Из этих чисел находим максимальное число – это 0. Это значит, что критерий Вальда рекомендует принять первый вариант решения.

Правило Сэвиджа аналогично правилу Вальда, только анализируется матрица сожалений: рассматривая i -е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимальных сожалений $b_i = \max_j r_{ij}$ и выберем решение i_0 с наименьшим b_{i_0} . Имеем:

$b_1 = 12, b_2 = 4, b_3 = 8, b_4 = 24$. Из этих чисел выбираем минимальное. Это 4. Значит, правило Сэвиджа рекомендует принять второй вариант решения.

У нас известны вероятности вариантов обменного курса:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$
---------------	---------------	---------------	----------------

то правило максимизации ожидаемого дохода рекомендует принять решение, соответствующее наибольшему из ожидаемых доходов:

$$MQ_1 = 0 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{5} + 20 \cdot \frac{1}{20} = 3$$

$$MQ_2 = 0 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{5} + 32 \cdot \frac{1}{20} = \frac{21}{5}$$

$$MQ_3 = 0 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{4} + 12 \cdot \frac{1}{5} + 24 \cdot \frac{1}{20} = \frac{28}{5}$$

$$MQ_4 = -6 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 8 \cdot \frac{1}{20} = -\frac{23}{10}$$

Максимальный ожидаемый доход равен $\frac{28}{5}$, что соответствует третьему решению.

Правило минимизации ожидаемых сожалений рекомендует принять решение, соответствующее наименьшему из ожидаемых сожалений:

$$MR_1 = 0 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot \frac{1}{5} + 12 \cdot \frac{1}{20} = 3$$

$$MR_2 = 0 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{1}{20} = \frac{9}{5}$$

$$MR_3 = 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{5} + 8 \cdot \frac{1}{20} = \frac{2}{5}$$

$$MR_4 = 6 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{5} + 24 \cdot \frac{1}{20} = \frac{83}{10}$$

Снова третье решение.

Определим проекты, оптимальные по Паретто.

Найдём $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, для этого вначале найдём $M^2 Q_n$, где $n = 1, 2, 3, 4$

$$M^2 Q_1 = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 4^2 \cdot \frac{1}{4} + 5^2 \cdot \frac{1}{5} + 20^2 \cdot \frac{1}{20} = 29$$

$$M^2 Q_2 = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 4^2 \cdot \frac{1}{4} + 8^2 \cdot \frac{1}{5} + 32^2 \cdot \frac{1}{20} = 68$$

$$M^2 Q_3 = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 8^2 \cdot \frac{1}{4} + 12^2 \cdot \frac{1}{5} + 24^2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{368}{5}$$

$$M^2 Q_4 = (-6)^2 \cdot \frac{1}{2} + (-2)^2 \cdot \frac{1}{4} + 4^2 \cdot \frac{1}{5} + 8^2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{127}{5}$$

Тогда,

$$D_1 Q = 29 - 3^2 = 20 \qquad D_3 = \frac{368}{5} - \left(\frac{28}{5}\right)^2 = 42,24$$

$$D_2 Q = 68 - \left(\frac{21}{5}\right)^2 = 50,36 \qquad D_4 = \frac{127}{5} - \left(-\frac{23}{10}\right)^2 = 30,69$$

Следовательно,

$$\sigma_1 = \sqrt{20} \approx 4,47$$

$$\sigma_2 = \sqrt{50,36} \approx 7,08$$

$$\sigma_3 = \sqrt{42,24} \approx 6,49$$

$$\sigma_4 = \sqrt{30,69} \approx 5,54$$

Нанесём точки $(ME_i; \sigma_i)$ на график.

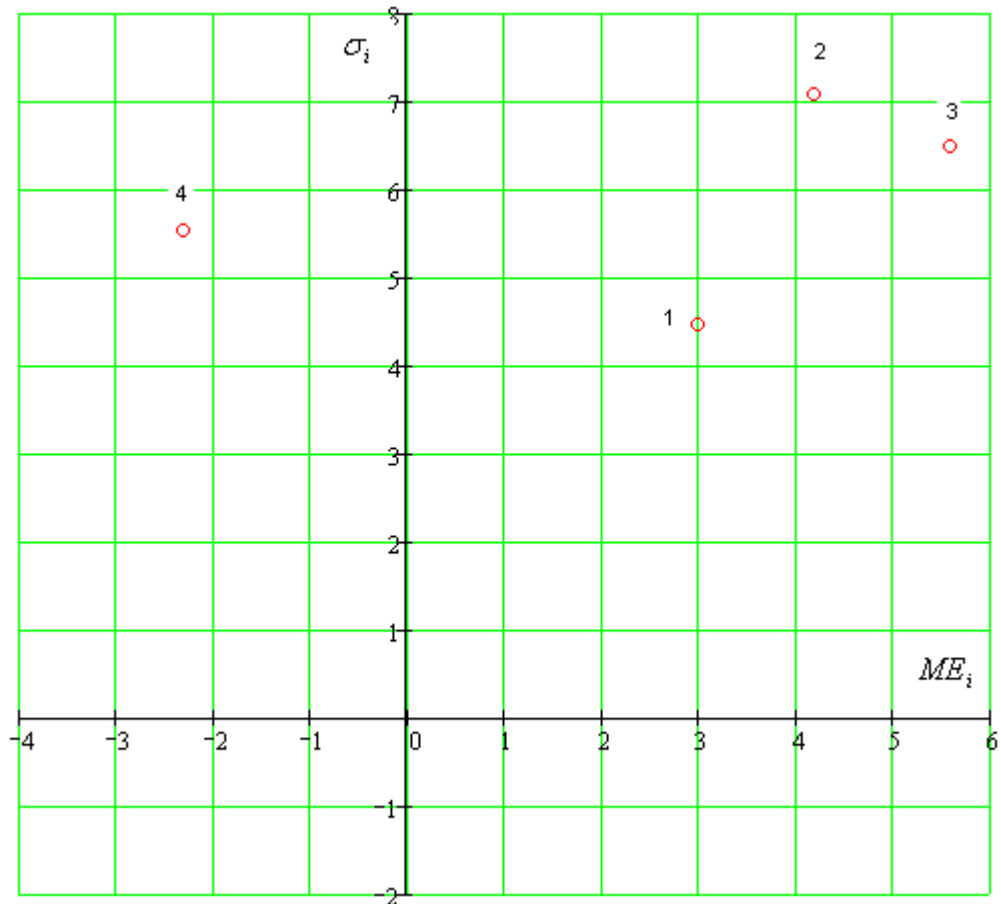


Рис.2 – График «риск - доходность»

Видно, что первая операция доминирует четвёртую, вторая и третья не доминируют третью. И первая не доминирует вторую и третью. Следовательно, первая, вторая и третья операции, оптимальны по Парето.

Отметим, что операции, оптимальные по Парето, не обязательно являются «самыми лучшими» и даже просто «хорошими» - эти операции не являются худшими.

Выбор операций среди оптимальных по Парето, осуществляется на основе склонности лица, принимающего соответствующее решение к риску.