Методы оптимизации
Исследование функции на экстремум

ЗАДАНИЕ.

Исследовать функцию двух переменных на экстремум, анализируя необходимые и достаточные условия

$f(X) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3$; $g_1(X) = x_1 + 4x_2 - x_3 - 2 = 0$; $g_2(X) = 2x_1 - 4x_2 + 5 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$L(x, \lambda) = \lambda_0(x_1^2 + 2x_2^2 + x_3) + \lambda_1(x_1 + 4x_2 - x_3 - 2) + \lambda_2(2x_1 - 4x_2 + 5)$.

Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0;$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} = 4\lambda_0 x_2 + 4\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0;$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_3} = 2\lambda_0 - \lambda_1 = 0;$$

$g_1(X) = x_1 + 4x_2 - x_3 - 2 = 0$;

$g_2(X) = 2x_1 - 4x_2 + 5 = 0$.

Решаем систему для двух случаев:

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Тогда получаем: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, что противоречит требованиям необходимого условия экстремума первого порядка.

Во втором случае $\lambda_0 \neq 0$. Перепишем систему, поделив уравнения на λ_0 с заменой $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ и $\frac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_1 и λ_2 соответственно:

$2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$;

$4x_2 + 4\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0$;

$2 - \lambda_1 = 0$;

$x_1 + 4x_2 - x_3 - 2 = 0$;

$2x_1 - 4x_2 + 5 = 0.$

Отсюда найдем:

$x_1 = -\frac{17}{6}$; $x_2 = -\frac{1}{6}$; $x_3 = -\frac{11}{2}$; $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = \frac{11}{6}$.

Таким образом, найдена одна условно-стационарная точка А: $x_1 = -\frac{17}{6}$; $x_2 = -\frac{1}{6}$; $x_3 = -\frac{11}{2}$; $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = \frac{11}{6}$.

Проверим достаточные условия экстремума:

$d^2L(x^*; \lambda^*) = 2dx_1^2 + 4dx_2^2;$

$dg_1(x^*) = dx_1 + 4dx_2 - dx_3 - 2 = 0;$

$dg_2(x^*) = 2dx_1 - 4dx_2 + 5 = 0;$

$d^2L(A) > 0.$

Поэтому в точке А – регулярный локальный условный минимум:

$$f_{\min} = f\left(-\frac{17}{6}; -\frac{1}{6}; -\frac{11}{2}\right) = \frac{31}{12}.$$