

## Тема: Межотраслевой баланс. Проверка продуктивности матрицы

ЗАДАНИЕ. Придумать свою какую-нибудь продуктивную матрицу размера  $2 \times 2$  и вычислить запас продуктивности двумя способами.

РЕШЕНИЕ. Придумаем продуктивную матрицу (сумма элементов любого столбца матрицы меньше единицы):

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Число  $\alpha$  называется запасом продуктивности продуктивной матрицы  $A$ , если все матрицы  $\mu A$ , где  $1 < \mu < (1 + \alpha)$ , продуктивны, а матрица  $(1 + \alpha)A$  - не продуктивная.

Вычислим запас продуктивности матрицы  $A$ .

1) Найдем  $(E - \mu A)^{-1}$ .

$$B = (E - \mu A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0,1\mu & -0,2\mu \\ -0,3\mu & 1 - 0,2\mu \end{pmatrix}$$

Определитель:

$$|B| = |E - \mu A| = \begin{vmatrix} 1 - 0,1\mu & -0,2\mu \\ -0,3\mu & 1 - 0,2\mu \end{vmatrix} = (1 - 0,1\mu)(1 - 0,2\mu) - (-0,3\mu)(-0,2\mu) = 1 - 0,3\mu - 0,04\mu^2.$$

Обратная матрица:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} 1 - 0,2\mu & 0,3\mu \\ 0,2\mu & 1 - 0,1\mu \end{pmatrix}^T = \frac{1}{1 - 0,3\mu - 0,04\mu^2} \begin{pmatrix} 1 - 0,2\mu & 0,2\mu \\ 0,3\mu & 1 - 0,1\mu \end{pmatrix}$$

В соответствии с теоремой 1 для продуктивности матрицы  $\mu A$  надо потребовать условие неотрицательности всех элементов матрицы  $B^{-1}$ .

1) Определитель меньше нуля, тогда все элементы матрицы должны быть тоже меньше нуля.

Решаем уравнение

$$1 - 0,3\mu - 0,04\mu^2 = 0,$$

$$100 - 30\mu - 4\mu^2 = 0,$$

$$\mu_1 = 2,5; \mu_2 = -10.$$

Тогда при  $\mu \in (-\infty; -10) \cup (2,5; \infty)$  определитель меньше нуля. Но при таких значениях, например,  $1 - 0,2\mu > 0$ , то есть данный случай не подходит.

2) Определитель больше нуля,  $\mu \in (-10; 2,5)$ , тогда все элементы матрицы должны быть тоже больше нуля.

Проверяем:

$$\begin{cases} 1 - 0,2\mu > 0, \\ 1 - 0,1\mu > 0, \\ 0,2\mu > 0, \\ 0,3\mu > 0; \\ 10 > 2\mu, \\ 10 > \mu, \\ \mu > 0; \\ 5 > \mu, \\ \mu > 0. \end{cases}$$

Искомое решение на пересечении интервалов  $\mu \in (-10; 2,5) \cap (0; 5) = (0; 2,5)$ .

Получаем, что  $0 < \mu < 2,5 = 1 + 1,5 \Rightarrow \alpha = 1,5$ . Запас продуктивности  $\alpha = 1,5$ .

2) Найдем число Фробениуса матрицы  $\mu A$ . Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} |\lambda E - \mu A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 0,1\mu & -0,2\mu \\ -0,3\mu & \lambda - 0,2\mu \end{vmatrix} = (\lambda - 0,1\mu)(\lambda - 0,2\mu) - (-0,3\mu)(-0,2\mu) = \\ &= \lambda^2 - 0,3\lambda\mu - 0,04\mu^2 = 0, \\ \lambda_1 &= 0,4\mu, \lambda_2 = -0,1\mu. \end{aligned}$$

Тогда число Фробениуса равно  $\lambda_A = 0,4\mu$ . По критерию продуктивности должно выполняться  $\lambda_A = 0,4\mu < 1, \Rightarrow \mu < 2,5 = 1 + 1,5, \Rightarrow \alpha = 1,5$ .

Пришли к тому же результату: запас продуктивности  $\alpha = 1,5$ .