Статистическая обработка результатов испытаний

ЗАДАНИЕ. При определении удельного расхода корундового шлифовального круга при шлифовке стальных деталей (отношение изношенного объема круга в мм^3 к объему сошлифованного металла (в мм^3) были получены следующие результаты:

0,716	0,72	0,714	0,708	0,722	0,724	0,717	0,719	0,704	0,716	0,718	0,712
0,728	0,711	0,707	0,714	0,715	0,702	0,723	0,709	0,724	0,718	0,717	0,714
0,727	0,703	0,726	0,719	0,717	0,703	0,72	0,717	0,721	0,714	0,728	0,702
0,712	0,715	0,718	0,71	0,718	0,732	0,723	0,704	0,713	0,717	0,714	0,731
0,725	0,722	0,719	0,734	0,717	0,724	0,711	0,732	0,715	0,719	0,718	0,729
0,728	0,729	0,726	0,73	0,715	0,717	0,724	0,717	0,72	0,719	0,733	0,722
7,13	0,703	0,718	0,705	0,723	0,721	0,733	0,72	0,718	0,713	0,716	0,71
0,714	0,706	0,715	0,709	0,716	0,711	0,719	0,703	0,721	0,723	0,713	0,725
7,18	0,729	0,705	0,722								

Провести статистическую обработку результатов испытаний.

РЕШЕНИЕ.

Упорядочим значения по возрастанию и найдем размах вариации: $R = x_{\max} - x_{\min} = 0,734 - 0,702 = 0,032$. Выберем количество интервалов равным $k = 8$, тогда длина интервала равна $h = \dfrac{R}{k} = \dfrac{0,032}{8} = 0,004$.

Подсчитывая количество значений признака, попавших в каждый интервал, получим интервальный вариационный ряд (конец интервала всегда включается, начало включается только для первого интервала).

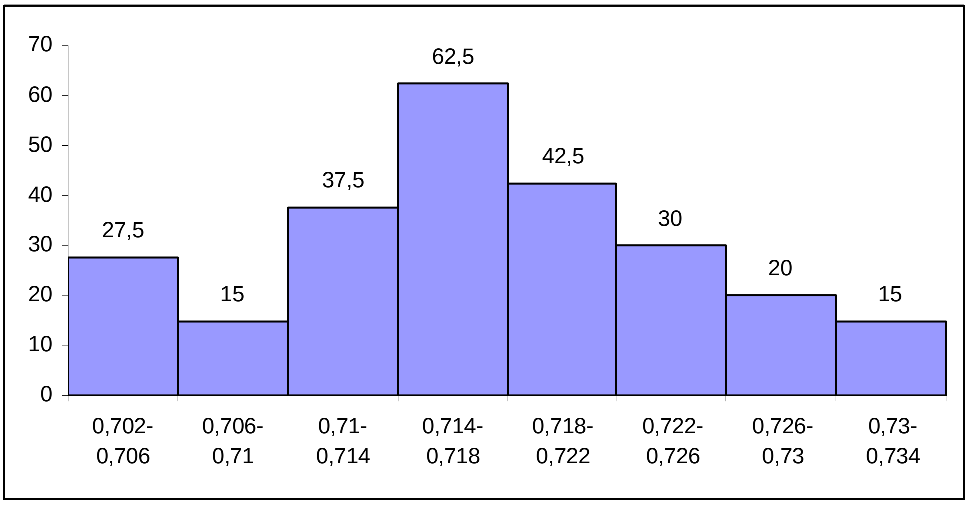
Интервал	Начало	Конец	Частота, n_i
1	0,702	0,706	11
2	0,706	0,71	6
3	0,71	0,714	15
4	0,714	0,718	25
5	0,718	0,722	17
6	0,722	0,726	12
7	0,726	0,73	8
8	0,73	0,734	6

Построим гистограмму относительных частот. Подсчитаем плотность относительных частот: $w_i = \dfrac{n_i}{n \cdot h} = \dfrac{n_i}{0,4}$.

Интервал	Начало	Конец	Частота, n_i	Плотность отн. частоты w_i
1	0,702	0,706	11	27,5
2	0,706	0,71	6	15
3	0,71	0,714	15	37,5

4	0,714	0,718	25	62,5
5	0,718	0,722	17	42,5
6	0,722	0,726	12	30
7	0,726	0,73	8	20
8	0,73	0,734	6	15

Гистограмма:



Приписывая частоты n_i серединам интервалов, получим выборку в виде дискретного вариационного ряда.

x_i	n_i
0,704	11
0,708	6
0,712	15
0,716	25
0,72	17
0,724	12
0,728	8
0,732	6

Найдем точечные характеристики выборки.

Выборочное среднее значение $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i = \dfrac{1}{100} 71,716 = 0,71716.$

Исправленная (несмещенная) выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 n_i = \frac{1}{99} 0,0058 \approx 0,000059.$$

Исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{0,000059} \approx 0,0077.$

Промежуточные вычисления приведены в таблице:

x_i	n_i	$x_i n_i$	$(x_i - \overline{X})^2 n_i$
0,704	11	7,744	0,001905
0,708	6	4,248	0,000503
0,712	15	10,68	0,000399
0,716	25	17,9	3,36E-05
0,72	17	12,24	0,000137
0,724	12	8,688	0,000561
0,728	8	5,824	0,00094
0,732	6	4,392	0,001321
Сумма	**100**	**71,716**	**0,005801**

Выдвинем гипотезу H_0: генеральная совокупность имеет нормальное распределение с параметрами $a = 0,71716$ и $\sigma = 0,0077$. Предполагаемая плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{0,0077\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-0,71716)^2}{2 \cdot 0,0077^2} \right)$$

Проверим эту гипотезу по критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0,05$.
Рассчитываем теоретические частоты n_i^0 по формуле

$n_i^0 = \dfrac{nh}{S}\varphi(u_i)$, где $u_i = \dfrac{x_i - \overline{x}}{S}$, h =0,004 – шаг, $\varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$.

Вычисления представим в виде таблицы:

x_i	u_i	$\varphi(u_i)$	n_i^0
0,704	-1,71	0,0925	4,805
0,708	-1,19	0,1965	10,208
0,712	-0,67	0,3187	16,556
0,716	-0,15	0,3945	20,494
0,72	0,37	0,3726	19,356
0,724	0,89	0,2685	13,948
0,728	1,41	0,1476	7,668
0,732	1,93	0,062	3,221

Наблюдаемое значение критерия вычислим по формуле

$\chi^2_{\text{íàáë}} = \sum_{i=1}^{8} \dfrac{(n_i - n_i^0)^2}{n_i^0}$ и вычисления представим в виде таблицы.

x_i	n_i	n_i^0	$\lvert n_i - n_i^0 \rvert$	$(n_i - n_i^0)^2$	$\dfrac{(n_i - n_i^0)^2}{n_i^0}$
0,704	11	4,805	6,195	38,376	7,986
0,708	6	10,208	4,208	17,706	1,735
0,712	15	16,556	1,556	2,421	0,146
0,716	25	20,494	4,506	20,308	0,991
0,72	17	19,356	2,356	5,550	0,287
0,724	12	13,948	1,948	3,795	0,272
0,728	8	7,668	0,332	0,111	0,014

0,732	6	3,221	2,779	7,724	2,398
				Сумма	**13,83**

По таблице критических значений $\chi^2_{\text{кр}}$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числе степеней свободы $k = l - 3 = 8 - 3 = 5$ найдем $\chi^2_{\text{кр}} = 11,1$. Так как $\chi^2_{\text{набл}} = 13,83 > \chi^2_{\text{кр}} = 11,1$, нулевую гипотезу следует отвергнуть при данном уровне значимости.

Найдем доверительный интервал для математического ожидания $M(X)$ с надежностью 0,95, используя формулу:

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < M(X) < \bar{x} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}},$$

где t_γ определяется из таблицы по заданным $n = 100$ и $\gamma = 0,95$, откуда $t_\gamma \approx 1,984$.

Получаем после подстановки известных данных:

$$0,71716 - 1,984\frac{0,0077}{\sqrt{100}} < M(X) < 0,71716 + 1,984\frac{0,0077}{\sqrt{100}}$$

$$0,7156 < M(X) < 0,7187.$$

Найдем доверительный интервал для среднего квадратического отклонения с надежностью 0,95, используя формулу:

$S(1-q) < \sigma < S(1+q)$, где q определяем из таблицы по заданным $n = 100$ и $\gamma = 0,95$, откуда $q = 0,143$. Получаем после подстановки известных данных:

$$0,0077(1 - 0,143) < \sigma < 0,0077(1 + 0,143)$$

$$0,0066 < \sigma < 0,0088.$$