Решение задачи (экспоненциальное распределение)

Задача. Случайная величина задана плотностью распределения $p(x) = ce^{-3x}$ при $x > 0$, и ноль в остальных случаях. Найти постоянную c, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Определим параметр c. Для того, чтобы $p(x)$ являлась плотностью, необходимо, чтобы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$. Получаем:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} ce^{-3x}dx = -\int\limits_{0}^{+\infty} ce^{-3x}d(-x) = -c\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{c}{3}(\lim_{x\to\infty} e^{-3x} - 1) = \frac{c}{3} \Rightarrow c = 3.$$

Получили $p(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0 \\ 3e^{-3x}, \ x > 0. \end{cases}$

Вычислим математическое ожидание:

$$MX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)xdx = \int\limits_{0}^{\infty} 3e^{-3x}xdx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = 3e^{-3x}dx & v = -e^{-3x} \end{vmatrix} = -e^{-3x}x\Big|_0^{\infty} + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{3}.$$

Вычислим дисперсию:

$$DX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)x^2dx - (MX)^2 = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-3x}x^2dx - \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = 3e^{-3x}dx & v = -e^{-3x} \end{vmatrix} = -e^{-3x}x^2\Big|_0^{\infty} + 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-3x}xdx - \frac{1}{9} = 0 + 2\cdot\frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}.$$

Вычислим среднее квадратическое отклонение $\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$.