

Решение задачи: непрерывная случайная величина, закон арктангенса.

Задание.

Функция распределения вероятностей случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = A + B \arctan(x/2), \quad -\infty < x < +\infty \text{ (закон Коши).}$$

А) определить постоянные A и B ;

Б) найти плотность распределения вероятностей

В) найти $P(-1 < X < 1)$;

Г) нарисовать график $F(x)$;

Д нарисовать график $f(x)$.

Решение.

Определить постоянные A и B :

$$F(-\infty) = A + B \arctan(-\infty) = 0,$$

$$F(\infty) = A + B \arctan(\infty) = 1,$$

то есть получаем систему:

$$\begin{cases} A - \pi/2 B = 0, \\ A + \pi/2 B = 1; \end{cases}$$

откуда $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{\pi}$, то есть $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(x/2)$.

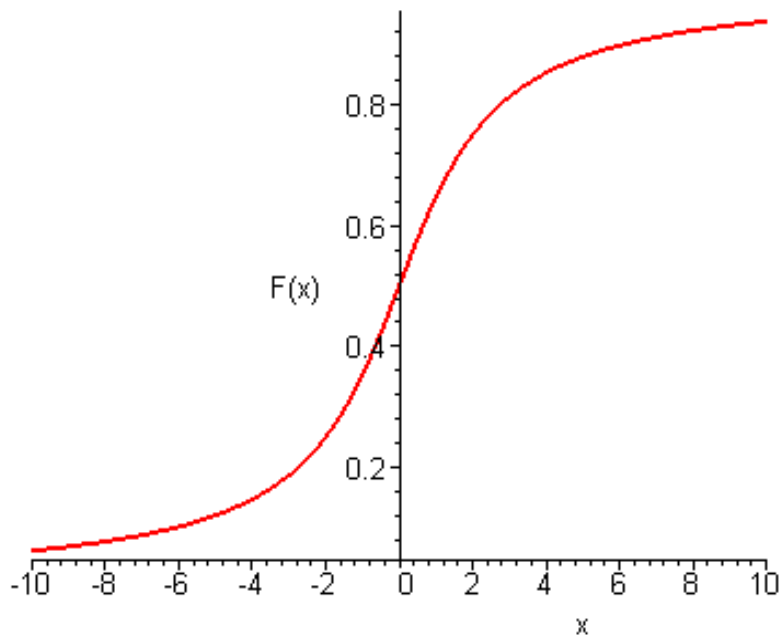
Найдем плотность распределения вероятностей по формуле $f(x) = F'(x)$, откуда

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1/2}{1+(x/2)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{2}{4+x^2}.$$

Найдем

$$\begin{aligned} P(-1 < X < 1) &= F(1) - F(-1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(1/2) \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(-1/2) \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \arctan(1/2) \approx 0,295. \end{aligned}$$

Нарисуем график $F(x)$:



Нарисуем график $f(x)$:

