Вариационное исчисление: решение задачи на поиск экстремалей

Задание. *Найти все экстремали функционала* $J(y)$, *удовлетворяющие указанным граничным условиям:*

$$J(y)=\int_0^1 e^{-x}y''^2dx, y(0)=0, y'(0)=1, y(1)=e, y'(1)=2e.$$

Решение.

Известно [1, с.13], что для функционала

$$V[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))dx,$$

где F – функция, дифференцируемая n+2 раза по всем аргументам, $y(x)\in C^n[x_0,x_1]$, а граничные условия имеют вид:

$$\left.\begin{array}{l} y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \\ y(x_1)=y_1,\ y'(x_1)=y'_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}. \end{array}\right\}$$

экстремалями являются интегральные кривые уравнения Эйлера-Пуассона:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-\dots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0.$$

В нашем случае n=2, $F(x,y,y')=e^{-x}y''^2$. Уравнение Эйлера-Пуассона имеет вид:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d}{dx^2}F_{y''}=0.$$

Функция F зависит только от x, y'', поэтому $F_y=F_{y'}=0$. $F_{y''}=2e^{-x}y''$.
Следовательно, уравнение Эйлера-Пуассона в этом случае имеет вид:

$$\frac{d}{dx^2}F_{y''}=0;$$

$$\frac{d}{dx^2}\left(2e^{-x}y''\right)=0;$$

$$\frac{d}{dx}\left(-2e^{-x}y''+2e^{-x}y^{(3)}(x)\right)=0;$$

$$2e^{-x}y''-2e^{-x}y^{(3)}(x)-2e^{-x}y^{(3)}(x)+2e^{-x}y^{(4)}(x)=0;$$

$$2e^{-x}y''-4e^{-x}y^{(3)}(x)+2e^{-x}y^{(4)}(x)=0;$$

$$y''-2y^{(3)}(x)+y^{(4)}(x)=0.$$

Решим последнее уравнение. Это линейное однородное дифференциальное уравнение 4-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение, соответствующее ему, имеет вид:

$$\lambda^4-2\lambda^3+\lambda^2=0;$$

$$\lambda^2\left(\lambda^2-2\lambda+1\right)=0;$$

$$\lambda^2(\lambda-1)^2=0.$$

$$\lambda_1=\lambda_2=0;\ \lambda_3=\lambda_4=1.$$

Характеристическое уравнение имеет вещественные корни $\lambda=0,\lambda=1$ кратности 2. Значит общее решение дифференциального уравнения $y''-2y^{(3)}(x)+y^{(4)}(x)=0$ имеет вид:

$$y=C_1e^{1x}+C_2xe^{1x}+C_3e^{0x}+C_4xe^{0x};$$

$$y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3+C_4x.$$

Здесь C_1,C_2,C_3,C_4 - произвольные постоянные.

Найдем экстремаль, удовлетворяющую граничным условиям.

Из условия $y(0)=0$ следует, что

$$y(0)=C_1+C_3=0.$$

Из условия $y'(0)=1$ следует, что

$$y'(0)=C_1+C_2+C_4=1.$$

Из условия $y(1)=e$ следует, что

$$y(1)=C_1e+C_2e+C_3+C_4=e.$$

Из условия $y'(1)=2e$ следует, что

$$y'(1) = C_1 e + 2C_2 e + C_4 = 2e.$$

Для нахождения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 решим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 0; \\ C_1 + C_2 + C_4 = 1; \\ C_1 e + C_2 e + C_3 + C_4 = e; \\ C_1 e + 2C_2 e + C_4 = 2e; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_3; \\ -C_3 + C_2 + C_4 = 1; \\ -C_3 e + C_2 e + C_3 + C_4 = e; \\ -C_3 e + 2C_2 e + C_4 = 2e; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_3; \\ C_4 = 1 + C_3 - C_2; \\ -C_3 e + C_2 e + C_3 + 1 + C_3 - C_2 = e; \\ -C_3 e + 2C_2 e + 1 + C_3 - C_2 = 2e; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_3; \\ C_4 = 1 + C_3 - C_2; \\ C_3(2-e) + C_2(e-1) = e - 1; \\ -C_3 e + 2C_2 e + 1 + C_3 - C_2 = 2e; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_3; \\ C_4 = 1 + C_3 - C_2; \\ C_3 = \dfrac{(1-C_2)(e-1)}{(2-e)}; \\ \dfrac{(1-C_2)(e-1)}{(2-e)}(1-e) + C_2(2e-1) + 1 - 2e = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_3; \\ C_4 = 1 + C_3 - C_2; \\ C_3 = \dfrac{(1-C_2)(e-1)}{(2-e)}; \\ \dfrac{(C_2-1)(e-1)^2}{(2-e)} + (C_2-1)(2e-1) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0; \\ C_4 = 0; \\ C_3 = 0; \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, экстремаль $y = xe^x$ удовлетворяет исходным граничным условиям.

Ответ: $y = xe^x$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Тракимус Ю.В. Основы вариационного исчисления в примерах и задачах: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. – 48 с.