КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

«Математический анализ. Часть 1»

Задание 1. Найдите производные функций.

2. а) $y=\left(3x^3-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}+1\right)^4$

$$y'=\left(\left(3x^3-2x^{-\frac{1}{3}}+1\right)^4\right)'=4\left(3x^3-2x^{-\frac{1}{3}}+1\right)^3\left(3x^3-2x^{-\frac{1}{3}}+1\right)'=$$

$$=4\left(3x^3-2x^{-\frac{1}{3}}+1\right)^3\left(6x^2+\frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}\right)=8\left(3x^3-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+1\right)^3\left(3x^2+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)$$

б) $y=\sin\left(3x^2+8\right)$

$$y'=\cos\left(3x^2+8\right)\cdot\left(3x^2+8\right)'=\cos\left(3x^2+8\right)\cdot 6x=6x\cos\left(3x^2+8\right)$$

Задание 2. Найдите производные функций.

12. а) $y=arctg\,4x+\sqrt{3-2x^2}$

$$y'=\frac{(4x)'}{1+(4x)^2}+\frac{(3-2x^2)'}{2\sqrt{3-2x^2}}=\frac{4}{1+16x^2}-\frac{4x}{2\sqrt{3-2x^2}}$$

б) $y=3^{\ln x}$

$$y'=3^{\ln x}\cdot\ln 3\cdot(\ln x)'=\frac{3^{\ln x}\cdot\ln 3}{x}$$

Задание 3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции *y=f(x)* на отрезке [a; b].

22. $y=4-x-\dfrac{4}{x^2}$, $[1;4]$

Функция непрерывна и определена на всей области определения.

Найдем критические точки.

$$y' = (4 - x - 4x^{-2})' = -1 + 8x^{-3} = -1 + \frac{8}{x^3} = \frac{-x^3 + 8}{x^3} = \frac{2^3 - x^3}{x^3} = \frac{(2-x)(4+2x+x^2)}{x^3}$$

$$y' = 0$$

$$x = 2$$

Найдем значения функции в критической точке и на концах отрезка.

$$y(2) = 4 - 2 - \frac{4}{2^2} = 2 - 1 = 1$$

$$y(1) = 4 - 1 - \frac{4}{1^2} = 3 - 4 = 1$$

$$y(4) = 4 - 1 - \frac{4}{4^2} = 3 - \frac{4}{16} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2{,}75$$

Сравним полученные значения.

Ответ: $y_{\min} = y(1) = y(2) = 1;\ y_{\max} = y(4) = 2{,}75$

__Задание 4.__ Исследуйте функцию *y=f(x)* с помощью производной и постройте ее график.

32. $y = x^2(x-2)^2$

1. Область определения функции

D(y): $x \in (-\infty; +\infty)$

2. Координаты точек пересечения с осями ординат

$$y(0) = 0^2(0-2)^2 = 0$$

$$y(x) = 0$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = 2$$

Точки пересечения с осями координат: (0; 0), (2; 0).

3. Чётность, нечётность функции

$$y(-x) = (-x)^2(-x-2)^2 = x^2(x+2)^2 \neq y(x) \neq -y(x)$$

Функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Асимптоты графика и пределы на плюс, минус бесконечности.

Функция не имеет точек разрыва, следовательно, вертикальных асимптот нет.

Уравнение наклонных асимптот $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x-2)^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x(x-2)^2 = \infty$$

Наклонных асимптот нет.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2(x-2)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2(x-2)^2 = +\infty$$

5. Интервалы монотонности и точки экстремума.

$$y'(x) = \left(x^2(x-2)^2\right)' = \left(x^2\right)'(x-2)^2 + x^2\left((x-2)^2\right)' = 2x(x-2)^2 + x^2\cdot 2(x-2) =$$
$$= 2x(x-2)(x-2+x) = 2x(x-2)(2x-2) = 4x(x-2)(x-1)$$
$$y'(x) = 0$$

Точки экстремума:

$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2$

Функция возрастает при $y' > 0$ и убывает при $y' < 0$.

Занесем результаты исследования в таблицу.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;+\infty)$
$y'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$y(x)$	↘	min	↗	max	↘	min	↗

Функция убывает на промежутках $(-\infty;0)$ $(1;2)$

Функция возрастет на промежутках $(0;1)$ $(2;+\infty)$

Точки минимума: $x = 0$, $x = 2$

Точка максимума: $x = 1$

$y(0)=0^2(0-2)^2=0$

$y(1)=1^2(1-2)^2=1$

$y(2)=2^2(2-2)^2=0$

6. Промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба

$$y''(x)=\left(4x(x-2)(x-1)\right)'=\left((4x^2-8x)(x-1)\right)'=\left(4x^3-4x^2-8x^2+8x\right)'=$$

$$\left(4x^3-12x^2+8x\right)'=12x^2-24x+8=4(3x^2-6x+2)$$

$y''(x)=0$

$D=36-24=12$

$$x_1=\frac{6-\sqrt{12}}{6}=\frac{6-2\sqrt{3}}{6}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}42$$

$$x_2=\frac{6+\sqrt{12}}{6}=\frac{6+2\sqrt{3}}{6}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}\approx 1{,}58$$

Получили точки перегиба:

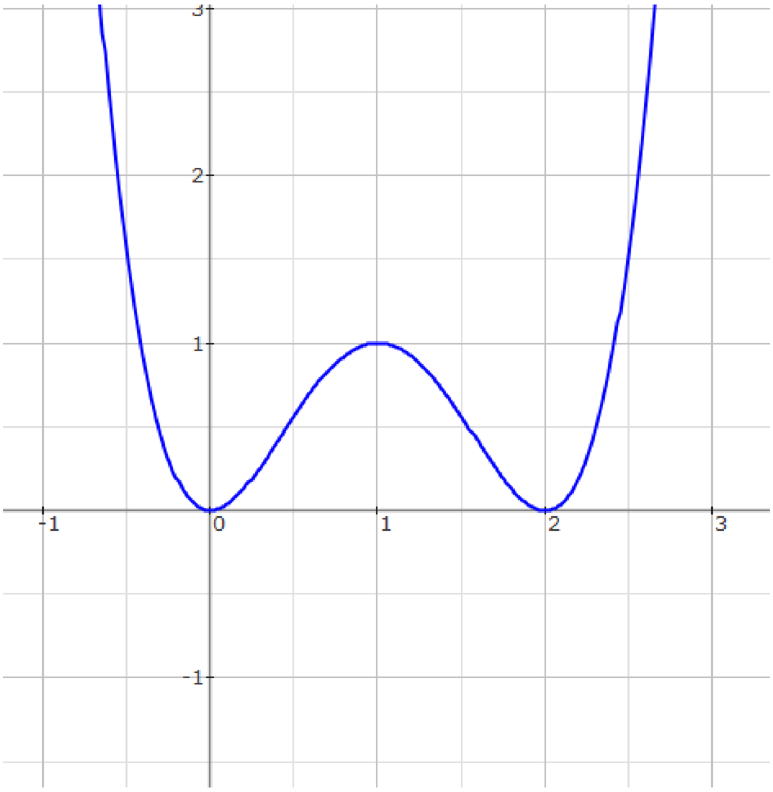
Занесем результаты исследования в таблицу.

x	$(-\infty;0{,}42)$	$0{,}42$	$(0{,}42;\,1{,}58)$	$1{,}58$	$(1{,}58;+\infty)$
$y''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\cup$		$\cap$		$\cup$

В интервалах $(-\infty;0{,}42)$ и $(1{,}58;+\infty)$ кривая вогнутая.

В интервале $(0{,}42;\,1{,}58)$ кривая выпуклая.

7. Построим график функции.



Задание 5. **Дана функция *z=f(x,y)* и точка $M_0(x_0,y_0)$. Найдите градиент функции в точке M_0 и производную функции *z* в точке M_0 по направлению вектора $\vec{a}$.**

42. $z = x^2e^y, M_0(2;0), \vec{a} = \{-3;4\}$

Найдем частные производные.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^y \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 2\cdot 2e^0 = 4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2e^y \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 2^2\cdot e^0 = 4$$

$$grad\ z = \frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j = 2xe^y i + x^2 e^y j$$

$$grad\ z\big|_{M_0} = 4i + 4j$$

Модуль вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{4}{5}$$

Производная функции z в точке M_0 по направлению вектора $\vec{a}$:

$$\frac{\partial z}{\partial a}\bigg|_{M_0} = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{M_0} \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{M_0} \cos\beta = 4\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\cdot\frac{4}{5} = -\frac{12}{5} + \frac{16}{5} = \frac{4}{5}$$

<u>Задание 6.</u> Исследуйте функцию на экстремум.

52. $z = 7x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 7y - 12$

Найдем частные производные.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 14x - 6y - 4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -6x + 6y + 7$$

Решим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14x - 6y - 4 = 0 \\ -6x + 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14x - 6y - 4 = 0 \\ 8x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{21}{4}-6y-4=0 \\ x=-\frac{3}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6y=-\frac{37}{4} \\ x=-\frac{3}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{3}{8} \\ y=-\frac{37}{24} \end{cases}$$

Получили стационарную точку:

$$M\left(-\frac{3}{8};-\frac{37}{24}\right)$$

Найдем производные второго порядка.

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=14>0$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6$$

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-6$$

$$AC-B^2=14\cdot 6-(-6)^2=48>0$$

Следовательно, в точке M_0 функция имеет минимум.

$$z_{\min}=z\left(-\frac{3}{8};-\frac{37}{24}\right)=7\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)^2-6\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{37}{24}\right)+3\cdot\left(-\frac{37}{24}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)+7\cdot\left(-\frac{37}{24}\right)-12=$$
$$=-\frac{63}{64}-\frac{111}{32}+\frac{3}{2}-\frac{259}{24}-12\approx-25{,}75$$

Задание 7. Решите дифференциальное уравнение $e^{-y}\left(1+y'\right)=1$.

Решение.

$$e^{-y}(1+y')=1,$$
$$1+y'=e^{y},$$
$$\frac{dy}{dx}=e^{y}-1,$$
$$\frac{dy}{e^{y}-1}=dx.$$

Интегрируем:

$$\int\frac{dy}{e^{y}-1}=\int dx,$$

Вычисляем интеграл:

$$\int\frac{dy}{e^{y}-1}=\int\frac{e^{y}dy}{\left(e^{y}-1\right)e^{y}}=\int\frac{d\left(e^{y}\right)}{\left(e^{y}-1\right)e^{y}}=\left|t=e^{y}\right|=\int\frac{dt}{(t-1)t}=$$
$$=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=\ln|t-1|-\ln|t|+C=\ln|e^{y}-1|-\ln|e^{y}|+C=$$
$$=\ln|1-1/e^{y}|+C.$$

Получаем

$$\ln|1-1/e^{y}|=x+\ln C,$$
$$1-1/e^{y}=Ce^{x},$$
$$\frac{1}{e^{y}}=1-Ce^{x},$$
$$e^{y}=\frac{1}{1-Ce^{x}},$$
$$y=\ln\left(\frac{1}{1-Ce^{x}}\right).$$

Общее решение: $y=\ln\left(\frac{1}{1-Ce^{x}}\right)$

Задание 8. Решите дифференциальное уравнение

$$yy''-\left(y'\right)^{2}=\left(y'\right)^{3},\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$$

Решение. Так как в уравнение явно не входит аргумент x, вводим параметризацию $p(y)=y'$, тогда $y''=p'p$. Получаем:

$$yp'p - p^2 = p^3,$$
$$yp'p = p^3 + p^2,$$
$$yp' = p^2 + p,$$
$$y\frac{dp}{dy} = p^2 + p,$$
$$\frac{dp}{p^2 + p} = \frac{dy}{y},$$
$$\frac{dp}{p(p+1)} = \frac{dy}{y},$$
$$\int \frac{dp}{p(p+1)} = \int \frac{dy}{y},$$
$$\ln|p| - \ln|p+1| = \ln|y| + \ln|C|,$$
$$\frac{p}{p+1} = Cy,$$
$$p = Cyp + Cy,$$
$$p(1 - Cy) = Cy,$$
$$p = \frac{Cy}{1 - Cy}.$$

Получили, что $y' = -\frac{Cy}{Cy-1}$. Найдем постоянную C из начальных условий $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

$$1 = -\frac{C}{C-1},$$
$$C - 1 = -C,$$
$$C = 1/2.$$

Таким образом, $y' = -\frac{1/2y}{1/2y - 1} = \frac{y}{2-y}$.

Интегрируем еще раз:

$$y' = \frac{y}{2-y},$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2-y},$$
$$\frac{(2-y)}{y}dy = dx,$$
$$\left(\frac{2}{y}-1\right)dy = dx,$$
$$\int\left(\frac{2}{y}-1\right)dy = \int dx,$$
$$2\ln|y| - y = x + C.$$

Найдем постоянную C из начальных условий $y(0)=1$.
$$2\ln|1| - 1 = 0 + C,$$
$$C = -1.$$

Таким образом, частное решение уравнения $2\ln|y| - y - x + 1 = 0.$

Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $yy'' = y'^2 + y^2$

Решение. Так как в уравнение явно не входит аргумент x, вводим параметризацию $p(y) = y'$, тогда $y'' = p'p$. Получаем:
$$yp'p = p^2 + y^2,$$
$$p' = \frac{p}{y} + \frac{y}{p}.$$
Это однородное уравнение вида $p' = f(p/y)$, делаем замену $z = p/y,\ p = zy,\ p' = z'y + z$. Получаем:

$$z'y+z=\frac{1}{z}+z,$$
$$z'y=\frac{1}{z},$$
$$\frac{dz}{dy}y=\frac{1}{z},$$
$$zdz=\frac{dy}{y},$$
$$\int zdz=\int\frac{dy}{y},$$
$$\frac{1}{2}z^2=\ln|y|+C,$$
$$z^2=2(\ln|y|+C).$$

Возвращаемся к исходной функции:

$$\frac{p^2}{y^2}=2(\ln|y|+C),$$
$$p^2=2(\ln|y|+C)y^2.$$

Приходим к новому уравнению:

$$y'^2=2(\ln|y|+C)y^2$$
$$y'=\pm\sqrt{2}y\sqrt{\ln|y|+C},$$
$$\frac{dy}{y\sqrt{\ln|y|+C}}=\pm\sqrt{2}dx,$$
$$\int\frac{dy}{y\sqrt{\ln|y|+C}}=\pm\sqrt{2}\int dx,$$
$$2\sqrt{\ln|y|+C}=\pm\sqrt{2}x+2\ln B,$$
$$\ln|y|+C=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x+\ln B\right)^2,$$
$$\ln|y|=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x+\ln B\right)^2-C,$$
$$y=\exp\left[\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x+\ln B\right)^2-C\right].$$

Получили общее решение $y=\exp\left[\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x+\ln B\right)^2-C\right]$, где C,B - произвольные постоянные. При делении на y также было потеряно решение $y=0$.