

## Расчетно-графическая работа

### Теория вероятностей

Вариант  $n = 24$

**Задание 1.** В урне 26 белых шаров и 6 черных шаров. Найти вероятность, что:

- А) вытащили белый шар;
- Б) вытащили 2 белых шара;
- В) вытащили 3 черных шара.

**Решение.** Используем классическое определение вероятности:  $P = \frac{m}{n}$ , где  $m$  – число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а  $n$  – число всех возможных исходов.

А)  $n = 26 + 6 = 32$  - способов вытащить один шар из имеющихся 32,

$m = 26$  - способов вытащить один белый шар, поэтому вероятность

$$P = \frac{26}{32} = \frac{13}{16} = 0,8125 .$$

Б)  $n = C_{32}^2 = \frac{32!}{2!30!} = \frac{31 \cdot 32}{1 \cdot 2} = 496$  - способов вытащить два шара из имеющихся 32,

$m = C_{26}^2 = \frac{26!}{2!24!} = \frac{25 \cdot 26}{1 \cdot 2} = 325$  - способов вытащить два белых шара, поэтому вероятность

$$P = \frac{325}{496} \approx 0,6552 .$$

Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>  
Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:  
[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)  
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$B) n = C_{32}^3 = \frac{32!}{3!29!} = \frac{30 \cdot 31 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4960 \text{ - способов вытащить три шара из имеющихся 32,}$$

$$m = C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 \text{ - способов вытащить два белых шара, поэтому вероятность}$$

$$P = \frac{20}{4960} = \frac{1}{248} \approx 0,004.$$

**Ответ:** А) 0,8125; Б) 0,6652; В) 0,004.

**Задание 2.** При помещении в урну тщательно перемешанных 44 шаров (из них 11 белых, остальные черные) один шар неизвестного цвета затерялся. Из оставшихся в урне 43 шаров наудачу вынимают один шар. Какова вероятность, что вынутый шар окажется белым?

**Решение.** Введем полную группу гипотез:

$H1$  = (Потерялся белый шар),

$H2$  = (Потерялся черный шар),

по условию эти гипотезы равновероятны, то есть  $P(H1) = P(H2) = 1/2 = 0,5$ .

По гипотезе  $H1$  в урне останется 10 белых и 33 черных, по гипотезе  $H2$  в урне останется 11 белых и 32 черных шара.

Введем событие  $A$  = (Вынутый шар – белый). Найдем условные

$$\text{вероятности: } P(A | H1) = \frac{10}{10+33} = \frac{10}{43}, \quad P(A | H2) = \frac{11}{11+32} = \frac{11}{43}.$$

Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>  
Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:  
[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)  
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Тогда вероятность события  $A$  найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(A | H1)P(H1) + P(A | H2)P(H2) = \frac{10}{43} \cdot \frac{1}{2} + \frac{11}{43} \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{86} \approx 0,244.$$

**Ответ:** 0,244

**Задание 3.** Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,24. Найти вероятность попадания в цель двух пуль и более, если число выстрелов равно 3000.

**Решение.** Имеем схему Бернулли (схему независимых испытаний) с параметрами  $n = 3000$ ,  $p = 0,24$ ,  $q = 1 - p = 0,76$ . Так как  $n = 3000$  достаточно велико, будем использовать приближенную формулу: интегральную теорему Лапласа:

$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$ , где  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 3000$ ,  $\Phi$  – функция Лапласа (значения берутся из таблиц).

Подставляем:

$$P_{3000}(2, 3000) \approx \Phi\left(\frac{3000 - 3000 \cdot 0,24}{\sqrt{3000 \cdot 0,24 \cdot 0,76}}\right) - \Phi\left(\frac{2 - 3000 \cdot 0,24}{\sqrt{3000 \cdot 0,24 \cdot 0,76}}\right) = \Phi(97,5) - \Phi(-30) = \\ = \Phi(97,5) + \Phi(30) = 0,5 + 0,5 = 1.$$

**Ответ:** вероятность приближенно равна 1.

Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>  
Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:  
[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)  
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

**Задание 4.** Случайная величина  $X$  задана рядом распределения

$x_i$	1	2	3	4	5
$p_i$	1/30	2/30	3/30	A/30	1/30

- А) определить константу А;
- Б) построить многоугольник распределения;
- В) найти функцию распределения и построить ее график;
- Г) найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ .

**Решение.** Найдем константу А из условия, что сумма всех вероятностей должна равняться единице:

$1/30 + 2/30 + 3/30 + A/30 + 1/30 = (7 + A)/30 = 1$ , откуда  $A = 23$  и получаем закон распределения  $X$

$x_i$	1	2	3	4	5
$p_i$	1/30	2/30	3/30	23/30	1/30

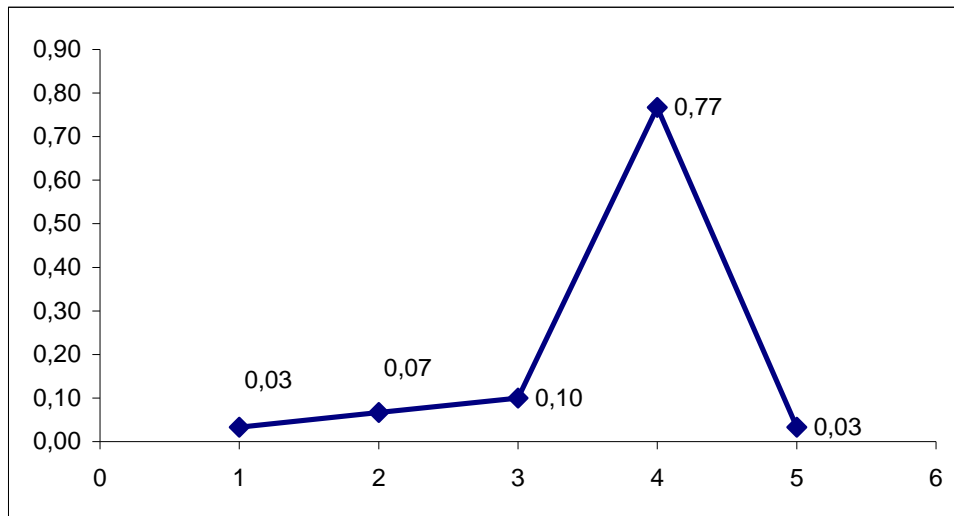
Построим многоугольник распределения:

Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию



Найдем функцию распределения  $F(x) = P(X < x)$ , то есть

при  $x \leq 1$ ,  $F(x) = 0$ ,

при  $1 < x \leq 2$ ,  $F(x) = 0 + 1/30 = 1/30$ ,

при  $2 < x \leq 3$ ,  $F(x) = 1/30 + 2/30 = 3/30$ ,

при  $3 < x \leq 4$ ,  $F(x) = 3/30 + 23/30 = 6/30$ ,

при  $4 < x \leq 5$ ,  $F(x) = 6/30 + 23/30 = 29/30$ ,

при  $x > 5$ ,  $F(x) = 29/30 + 1/30 = 1$ .

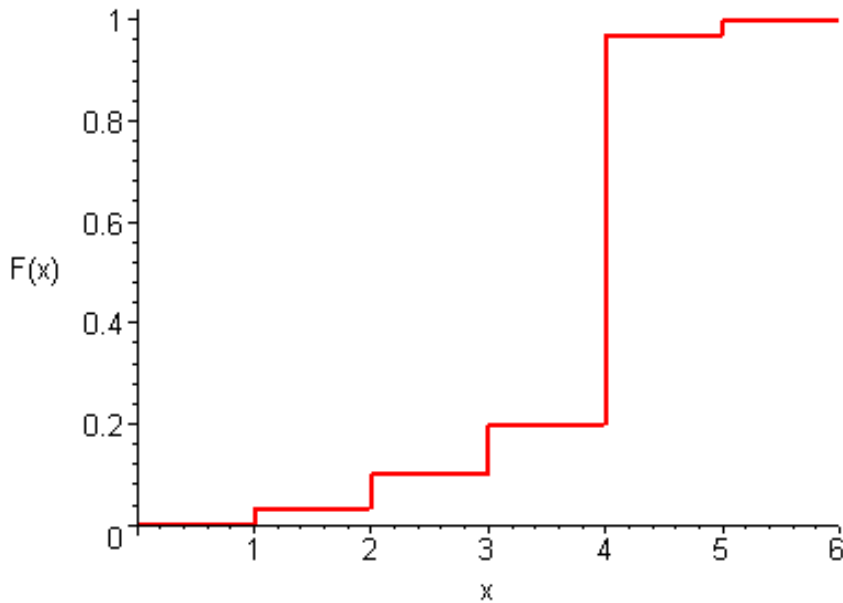
Построим график:

Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию



Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ .

$$MX = \sum x_i p_i = 1 \cdot 1/30 + 2 \cdot 2/30 + 3 \cdot 3/30 + 4 \cdot 23/30 + 5 \cdot 1/30 = 111/30 = 37/10 = 3,7$$

$$DX = \sum x_i^2 p_i - (MX)^2 = 1 \cdot 1/30 + 4 \cdot 2/30 + 9 \cdot 3/30 + 16 \cdot 23/30 + 25 \cdot 1/30 - 3,7^2 = 429/30 - 3,7^2 = 0,61.$$

**Задание 5.** Известно, что случайная величина  $X$  нормально распределена с параметрами  $a = 1$  и  $\sigma = 5$ . Найти:

- А) функцию распределения;
- Б) математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение;
- В) вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значения от  $-12$  до  $48$ ;
- Г) математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $2X - 24$ .

Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>  
Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:  
[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)  
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

**Решение.** Плотность распределения случайной величины  $X$  имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{50}\right)$$

Тогда функция распределения случайной величины  $X$  имеет вид:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-1)^2}{50}\right) dt.$$

Математическое ожидание  $MX = a = 1$ , дисперсия  $DX = \sigma^2 = 25$ , среднее квадратическое отклонение  $\sigma = 5$ .

Вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значения от  $-12$  до  $48$  найдем по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \text{ Получаем:}$$

$$\begin{aligned} P(-12 < X < 48) &= \Phi\left(\frac{48-1}{5}\right) - \Phi\left(\frac{-12-1}{5}\right) = \Phi(9,4) - \Phi(-2,6) = \\ &= 0,5 + \Phi(2,6) = 0,5 + 0,4953 = 0,9953. \end{aligned}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $2X - 24$ .

$$M(2X - 24) = 2MX - 24 = 2 \cdot 1 - 24 = -22$$

$$D(2X - 24) = 4DX - 0 = 4 \cdot 25 = 100$$

**Задание 6.** Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки объема  $m = 100$ .

Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$x_i$	238	241	245	250
$n_i$	48	24	47	25

**Решение.** Найдем выборочную среднюю по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i n_i = \frac{1}{144} 34973 = 242,8681.$$

$x_i$	238	241	245	250	<b>Сумма</b>
$n_i$	48	24	47	25	<b>144</b>
$x_i n_i$	11424	5784	11515	6250	<b>34973</b>

**Задание 7.** На уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты.

Эмп.ч.	24	29	40	51	35	28	25
Теор.ч.	26	28	43	54	33	30	24

**Решение.** Сравним эмпирические и теоретические частоты. Вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона по формуле:



Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$\chi^2_{i\hat{a}\hat{a}\hat{e}} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$$

Составим расчетную таблицу:

$n_i$	24	29	40	51	35	28	25	
$n_i'$	26	28	43	54	33	30	24	
$(n_i - n_i')^2$	4	1	9	9	4	4	1	<b>Сумма</b>
$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	0,154	0,036	0,209	0,167	0,121	0,133	0,042	<b>0,862</b>

Получили  $\chi^2_{i\hat{a}\hat{a}\hat{e}} = 0,862$ . По таблице критических точек по заданному уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы  $7-3=4$  находим  $\chi^2_{\hat{e}\hat{o}}(0,05; 4) = 9,5$ . Так как  $\chi^2_{i\hat{a}\hat{a}\hat{e}} = 0,862 < 9,5 = \chi^2_{\hat{e}\hat{o}}$ , нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности.