

Московский университет им. С.Ю. Витте
Рейтинговая работа
Математические методы в прикладной информатике
Вариант 11

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РЕЙТИНГОВОЙ РАБОТЫ

Задание 1.

1. По данным отчетного баланса

	П1	П2	П3	Yi	Xi
П1	40	20	20	20	100
П2	25	75	50	100	250
П3	25	100	50	25	200
Zj	10	55	80		
Xj	100	250	200		

найдите:

а) матрицу прямых затрат, проверьте полученную матрицу на продуктивность;

б) по заданному вектору

$$X = \begin{pmatrix} 220 \\ 550 \\ 500 \end{pmatrix}$$

найдите вектор Y;

в) по заданному вектору:

$$Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}$$

найдите вектор X.

Решение.

Найдем коэффициенты прямых затрат:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{40}{100} = 0.4; a_{12} = \frac{20}{250} = 0.08; a_{13} = \frac{20}{200} = 0.1 \\ a_{21} &= \frac{25}{100} = 0.25; a_{22} = \frac{75}{250} = 0.3; a_{23} = \frac{50}{200} = 0.25 \\ a_{31} &= \frac{25}{100} = 0.25; a_{32} = \frac{100}{250} = 0.4; a_{33} = \frac{50}{200} = 0.25 \end{aligned}$$

Матрица прямых затрат имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.08 & 0.1 \\ 0.25 & 0.3 & 0.25 \\ 0.25 & 0.4 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Матрица прямых затрат имеет неотрицательные элементы и удовлетворяет критерию продуктивности:

$$\begin{aligned} & \max\{0.4 + 0.25 + 0.25; 0.08 + 0.3 + 0.4; 0.1 + 0.25 + 0.25\} = \\ & \max\{0.9; 0.78; 0.6\} = 0.9 < 1 \end{aligned}$$

Следовательно, для любого вектора Y можно найти необходимый объем валового выпуска X по формуле[1]:

$$X = (E - A)^{-1}Y \quad (1)$$

Найдем матрицу полных затрат $S = (E - A)^{-1}$.

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.4 & 0.08 & 0.1 \\ 0.25 & 0.3 & 0.25 \\ 0.25 & 0.4 & 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.08 & -0.1 \\ -0.25 & 0.7 & -0.25 \\ -0.25 & -0.4 & 0.75 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу $(E - A)^{-1}$ средствами MS Excel (функция МОБР()).

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,05 & 0,48 & 0,43 \\ 1,2 & 2,05 & 0,84 \\ 1,33 & 1,25 & 1,93 \end{pmatrix}$$

Найдем X по заданному вектору Y :

$$\begin{aligned} X = (E - A)^{-1}Y \rightarrow X &= \begin{pmatrix} 2,05 & 0,48 & 0,43 \\ 1,2 & 2,05 & 0,84 \\ 1,33 & 1,25 & 1,93 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} 205 + 72 + 43 \\ 120 + 307.5 + 84 \\ 133 + 187.5 + 193 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 \\ 511.5 \\ 513.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Найдем Y по заданному вектору X :

$$X = (E - A)^{-1}Y \rightarrow Y = (E - A)X \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.08 & -0.1 \\ -0.25 & 0.7 & -0.25 \\ -0.25 & -0.4 & 0.75 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 220 \\ 550 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 \\ 205 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Выводы:

Матрица прямых затрат имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.08 & 0.1 \\ 0.25 & 0.3 & 0.25 \\ 0.25 & 0.4 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Она является продуктивной.

$$\text{При } Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 320 \\ 511.5 \\ 513.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{При } X = \begin{pmatrix} 220 \\ 550 \\ 500 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 38 \\ 205 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Имеются n пунктов производства и m пунктов распределения продукции. Стоимость перевозки единицы продукции с i -го пункта производства в j -й центр распределения C_{ij} приведена в таблице, где под строкой понимается пункт производства, а под столбцом - пункт распределения. Кроме того, в этой таблице в i -й строке указан объем производства в i -м пункте производства, а в j -м столбце указан спрос в j -м центре распределения. Необходимо составить план перевозок по доставке требуемой продукции в пункты распределения, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

	Стоимость перевозки единицы продукции				
	Пункты потребления				
Предприятия	1	2	3	4	Объем производства
A	5	1,8	6	6	30
B	1	5,1	8	2	42
C	3,5	6	3	3,1	10
D	2,2	4,9	1,3	4	16
E	3	7	8,95	1	10
Объемы потребления	20	38	30	22	

Решение.

Проверим, является ли транспортная задача открытой или закрытой.

$$20+38+30+22=110$$

$$30+42+10+16+10=108$$

Таким образом, транспортная задача является открытой, так как суммарный объем потребления не совпадает с суммарным объемом производства.

Введем фиктивное предприятие с объемом производства, равным 2.

	Стоимость перевозки единицы продукции				
	Пункты потребления				
Предприятия	1	2	3	4	Объем производства
A	5	1,8	6	6	30
B	1	5,1	8	2	42
C	3,5	6	3	3,1	10
D	2,2	4,9	1,3	4	16
E	3	7	8,95	1	10
F	0	0	0	0	2
Объемы потребления	20	38	30	22	

Теперь задача является закрытой, так как суммарный объем потребления совпадает с суммарным объемом производства.

Построим математическую модель нашей транспортной задачи. Неизвестные здесь - объемы перевозок x_{ij} - с i -ого предприятия в j -тый пункт потребления.

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

c_{ij} - стоимость перевозки единицы продукции с i -ого предприятия в j -тый пункт потребления.

Налагаются ограничения обязательного соблюдения объемов перевозки; то есть вся продукция должна быть вывезена из фабрик, при этом потребность всех центров должна быть удовлетворена полностью.

Таким образом, мы имеем следующую модель[3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = b_i \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = a_j \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, 6 \end{array} \right.$$

где:

b_i - объем производства на i -ом предприятии;

a_j - спрос в j пункте потребления.

Теперь вводим данные на лист Excel.

1			Транспортная задач				
2			Стоимость перевозк				
3			Пункты потреб				
4		Предприятия	1	2	3	4	Объем производства
5		A	5	1,8	6	6	30
6		B	1	5,1	8	2	42
7		C	3,5	6	3	3,1	10
8		D	2,2	4,9	1,3	4	16
9		E	3	7	8,95	1	10
10		F	0	0	0	0	2
11		Объемы потребления	20	38	30	22	
12							
13			Перевезено				
14			1	2	3	4	
15			Неизвестные				
16		A					=СУММ(C16:F16)
17		B					=СУММ(C17:F17)
18		C					=СУММ(C18:F18)
19		D					=СУММ(C19:F19)
20		E					=СУММ(C20:F20)
21		F					=СУММ(C21:F21)
22			=СУММ(C16:C21)	=СУММ(D16:D21)	=СУММ(E16:E21)	=СУММ(F16:F21)	
23		Объем потребления	20	38	30	22	
24							
25		Целевая функция	=СУММПРОИЗВ(C5:F				
26							

Рис. 1 –Лист MS Excel с исходными данными

Подготовив все данные, вызываем Поиск решения.

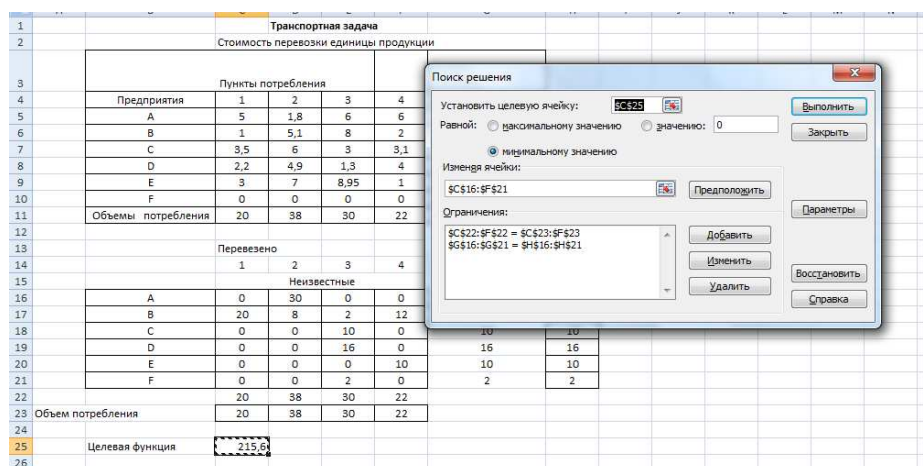


Рис. 2 – Настройки окна Поиска решения

В результате получим оптимальное решение в виде матрицы объемов перевозимой продукции и значение целевой функции.

13			Перевезено					
14			1	2	3	4		
15			Неизвестные					
16		A	0	30	0	0	30	30
17		B	20	8	2	12	42	42
18		C	0	0	10	0	10	10
19		D	0	0	16	0	16	16
20		E	0	0	0	10	10	10
21		F	0	0	2	0	2	2
22			20	38	30	22		
23	Объем потребления		20	38	30	22		
24								
25	Целевая функция		215,6					
26								

Рис. 3 – Оптимальное решение

Выводы:

С производства А в пункт 2 будет отправлено 30 ед. С производства В в пункт 1 будет отправлено 20 ед.; пункт 2 – 8 ед.; пункт 3 – 2 ед.; пункт 4 – 12 ед. С производства С в пункт 3 будет отправлено 10 ед. С производства D в пункт 3 будет отправлено 16 ед. С производства Е в пункт 4 будет отправлено 10 ед. Суммарные транспортные расходы составят 215,6 денежных единиц.

Пункт 3 недополучить 2 ед. продукции, так как F – фиктивное предприятие.

Задание 3.

Определить стратегии игроков и найти цену игры.

8	4	10	9
11	6	10	7
7	5	9	6

Решение.

В каждой строке найдем минимальный элемент, в каждом столбце – максимальный элемент[2].

Таблица 1 – Промежуточные действия

	A1	A2	A3	A4	
B1	8	4	10	9	4
B2	11	<u>6</u>	10	7	6
B3	7	5	9	6	5
	11	6	10		

$$\max\{4,6,5\} = 6$$

$$\min\{11,6,10\} = 6$$

Таким образом, цен игры равна 6.

Оптимальные стратегии – A2 и B2.

Выводы: цена игры равна 6. Игра имеет решение в чистых стратегиях.

Оптимальные стратегии – A2 и B2.

Решение рейтинговой работы по высшей математике скачано с
https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vitte

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

Список использованных источников

1. Арнольд, В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели / В.И. Арнольд. - М.: [не указано], 2000. - 324 с.
2. Бинмор, К. Теория игр.Очень краткое введение / К. Бинмор. - М.: ИД "Дело" РАНХиГС, 2019. - 256 с.
3. Боборыкин В.А. Математические методы решения транспортных задач. СПб.: СЗПИ, 2014. - 170 с.