

Московский университет им. С.Ю. Витте

Рейтинговая работа

Высшая математика

Вариант 1

Задание 1

Даны матрицы A, B, C и число q . Найти матрицу $D = AB + qC$.

$$1). \quad q = 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 7 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 5 \\ -6 & -7 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 \\ -1 & 5 & -6 \\ 1 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 7 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -7 & 5 \\ -6 & -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-30 & -7-35 & 5+30 \\ -28-42 & -49-49 & 35+42 \\ 8-12 & 14-14 & -10+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 & -42 & 35 \\ -70 & -98 & 77 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$q \cdot C = 3 \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 \\ -1 & 5 & -6 \\ 1 & -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -6 & -21 \\ -3 & 15 & -18 \\ 3 & -18 & 21 \end{pmatrix}$$

$$D = A \cdot B + q \cdot C = \begin{pmatrix} -34 & -42 & 35 \\ -70 & -98 & 77 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & -6 & -21 \\ -3 & 15 & -18 \\ 3 & -18 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34-12 & -42-6 & 35-21 \\ -70-3 & -98+15 & 77-18 \\ -4+3 & 0-18 & 2+21 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -46 & -48 & 14 \\ -73 & -83 & 59 \\ -1 & -18 & 23 \end{pmatrix}$$

Задание 2

Дана система линейных алгебраических уравнений.

Найти решение этой системы любым методом.

$$1). \quad \begin{cases} -3x + 4y + 9z = 7, \\ -6x - 8y + 3z = 1, \\ -7x - 9y + 4z = 2. \end{cases}$$

Решение.

Решим систему методом Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 9 & 7 \\ -6 & -5 & 3 & 1 \\ -7 & -9 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 9 & 7 \\ 0 & -16 & -15 & -13 \\ 0 & -55 & -51 & -43 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 9 & 7 \\ 0 & -16 & -15 & -13 \\ 0 & 0 & 9 & 27 \end{array}\right)$$

(1) Из 2-й строки вычли 1-ю, умноженную на 2. Из 3-й строки, умноженной на 3, вычли 1-ю, умноженную на 7.

(2) Из 3-й строки, умноженной на 16, вычли 2-ю, умноженную на 55.

Запишем и решим эквивалентную систему уравнений.

$$\begin{cases} -3x + 4y + 9z = 7, \\ -16y - 15z = -13, \\ 9z = 27. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 4y + 27 = 7, \\ -16y - 45 = -13, \\ z = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 4y = -20, \\ -16y = 32, \\ z = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 8 = -20, \\ y = -2, \\ z = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x = -12, \\ y = -2, \\ z = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4, \\ y = -2, \\ z = 3. \end{cases}$$

Ответ: (4; -2; 3).

Литература

1. Балдин, К.В. Математика : учебное пособие / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. - М. : Юнити-Дана, 2015. - 543 с. - Библиогр. В кн. - ISBN 5-238-00980-1 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114423>

Задание 3

Известны координаты (см. таблицу 1) в прямоугольной системе координат Oxy трех точек A, B, C , являющихся вершинами треугольника. Изобразить треугольник ABC в этой прямоугольной системе координат и найти:

- 3.1 координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и их длины;
- 3.2 скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и угол φ между векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$;
- 3.3 векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и площадь треугольника ABC ;
- 3.4 значение параметра β , при котором векторы $\overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ будут коллинеарны;
- 3.5 координаты точки P , делящей отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$;
- 3.6 каноническое уравнение стороны AB ;
- 3.7 уравнение с угловым коэффициентом и угловой коэффициент прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB ;

Таблица 1

Номер варианта	Координаты точек		
1	$A(1; -6)$	$B(3; 4)$	$C(-3; 3)$

Решение.

3.1 Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и их длины.

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 1; 4 + 6) = (2; 10)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 10^2} = \sqrt{4 + 100} = \sqrt{104}$$

$$\overrightarrow{AC} = (-3 - 1; 3 + 6) = (-4; 9)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 9^2} = \sqrt{16 + 81} = \sqrt{97}$$

3.2 Вычислим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и угол φ между ними.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot (-4) + 10 \cdot 9 = -8 + 90 = 82$$

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{82}{\sqrt{104} \cdot \sqrt{97}} \approx 0,816$$

$$\varphi = \arccos 0,816 \approx 35^\circ$$

3.3 Найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и площадь треугольника ABC .

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - 0,816^2} = \sqrt{0,482} \approx 0,577$$

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{104} \cdot \sqrt{97} \cdot 0,577 \approx 28,975$$

$$S = \frac{1}{2} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 2S = 57,95$$

3.4 Найдем значение параметра β , при котором векторы $\overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ будут коллинеарны.

$$\overrightarrow{AB} = (2; 10)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-4; 9)$$

$$\overrightarrow{BC} = (-3 - 3; 3 - 4) = (-6; -1)$$

Найдем координаты вектора^

$$\overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} = (2 - 4\beta; 10 + 9\beta)$$

У коллинеарных векторов координаты пропорциональны.

$$\frac{2-4\beta}{-6} = \frac{10+9\beta}{-1}$$

$$2-4\beta = 6(10+9\beta)$$

$$2-4\beta = 60+54\beta$$

$$58\beta = -58$$

$$\beta = -1$$

3.5 Найдем координаты точки P , делящей отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$.

$$K\left(\frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}; \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}\right)$$

$$K\left(\frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 3}{1 + \frac{1}{2}}; \frac{-6 + \frac{1}{2} \cdot 4}{1 + \frac{1}{2}}\right)$$

$$K\left(\frac{5}{2}; -\frac{8}{3}\right)$$

3.6 Составим каноническое уравнение стороны AB .

$A(1; -6), B(3; 4)$

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y+6}{4+6}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+6}{10}$$

$$AB: \frac{x-1}{1} = \frac{y+6}{5}$$

3.7 Найдем уравнение прямой, проходящей через точку $C(-3; 3)$ параллельно прямой AB .

Угловой коэффициент прямой AB выразим из ее уравнения.

$$5(x-1) = y+6$$

$$5x-5 = y+6$$

$$y = 5x-11$$

$$k_{AB} = 5$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $C(-3; 3)$ параллельно прямой AB имеет вид:

$$y - y_C = k_{AB}(x - x_C)$$

$$y - 3 = 5(x + 3)$$

$$y - 3 = 5x + 15$$

$$y = 5x + 18$$

Угловой коэффициент этой прямой $k = 5$.

Литература

Кузнецов, Б.Т. Математика : учебник / Б.Т. Кузнецов. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Юнити-Дана, 2015. - 719 с. : ил., табл., граф. - (Высшее профессиональное образование: Экономика и управление). - Библиогр. в кн. - ISBN 5-238-00754-X ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114717>

Задание 4

Известны координаты (см. таблицу 2) в прямоугольной системе координат $Oxyz$ вершин пирамиды A_1, A_2, A_3, A_4 .

4.1 найти смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$ и объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;

4.2 найти каноническое уравнение прямой A_1A_2 ;

4.3 найти общее уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

Таблица 2

Номер варианта	Координаты точек			
1	$A_1(4;2;5)$	$A_2(0;7;1)$	$A_3(0;2;7)$	$A_4(1;5;0)$

Решение

4.1 Найдем координаты векторов.

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (0-4; 7-2; 1-5) = (-4; 5; -4)$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (0-4; 2-2; 7-5) = (-4; 0; 2)$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (1-4; 5-2; 0-5) = (-3; 3; -5)$$

Вычислим смешанное произведение векторов.

$$(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}) = \begin{vmatrix} -4 & 5 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0 + 48 - 30 - 0 - 100 + 24 = -58$$

Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4})| = \frac{|-58|}{6} \approx 9,67$$

4.2 Найдем каноническое уравнение прямой A_1A_2 .

$$\frac{x-4}{0-4} = \frac{y-2}{7-2} = \frac{z-5}{1-5}$$

$$A_1A_2: \frac{x-4}{-4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-5}{-4}$$

4.3 Найдем общее уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-5 \\ 0-4 & 7-2 & 1-5 \\ 0-4 & 2-2 & 7-5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-5 \\ -4 & 5 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (x-4) \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - (y-2) \cdot \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + (z-5) \cdot \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-4) \cdot (10-0) - (y-2) \cdot (-8-16) + (z-5) \cdot (0+20) =$$

$$= 10(x-4) + 24(y-2) + 20(z-5) = 10x - 40 + 24y - 48 + 20z - 100 =$$

$$= 10x + 24y + 20z - 188 = 2(5x + 12y + 10z - 94)$$

$$A_1A_2A_3: 5x + 12y + 10z - 94 = 0$$

Литература

Кузнецов, Б.Т. Математика : учебник / Б.Т. Кузнецов. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Юнити-Дана, 2015. - 719 с. : ил., табл., граф. - (Высшее

Решение рейтинговой работы по высшей математике скачано с
https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vitte

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию
профессиональное образование: Экономика и управление). - Библиогр. в кн. -

ISBN 5-238-00754-X ; То же [Электронный ресурс]. - URL:

<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114717>